



Bildquelle: unsplash.com  
marco fileccia @fileccia

## Verständig und sicher im Einspluseins und Einsminuseins

Prof. Dr. Marcus Nührenbörger

Lara Graf, Prof. Dr. Häsel-Weide, Prof. Dr. Karina Höveler

**MaCo** 

Padlet: <https://padlet.com/haeselweide/vhww422n5ru30ea7>



1 Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

2 Grundvorstellungen

3 Kernaufgaben

4 Geschickt rechnen

5 Produktives Üben



Abbildung: K. Mosen (PIKAS)

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

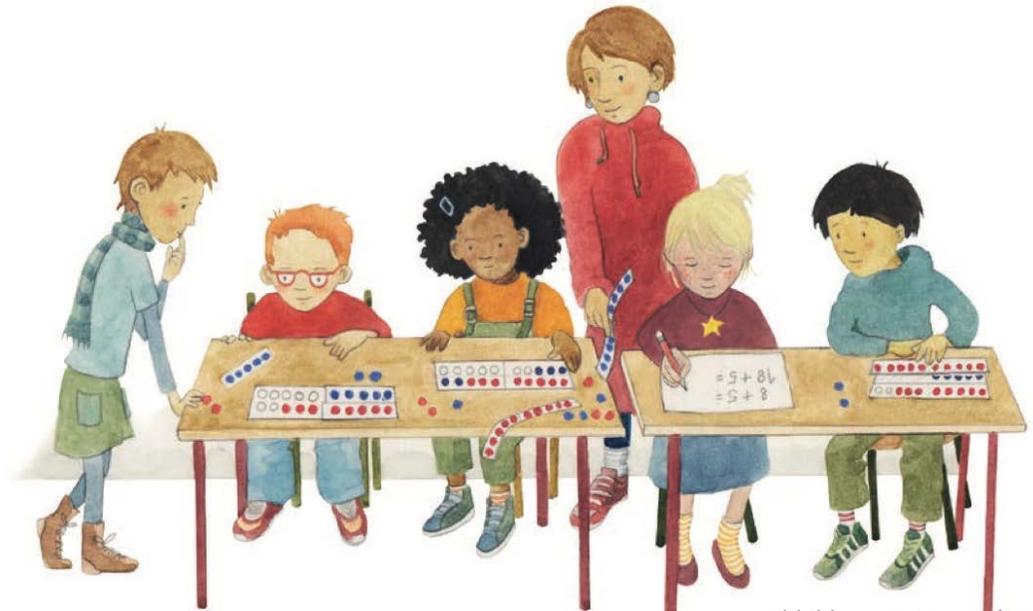
Ist das wirklich Mathematik?

Die Kinder sollten doch vor allem die Aufgaben im 1+1 und 1-1 auswendig lernen!?

Ich weiß auch nicht...

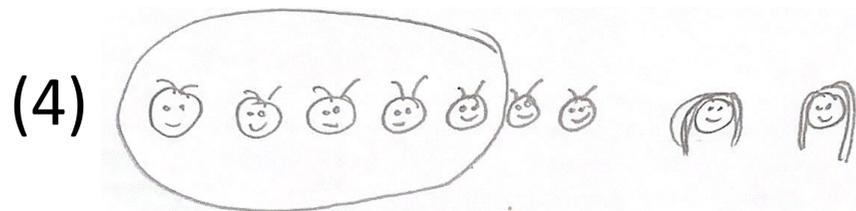
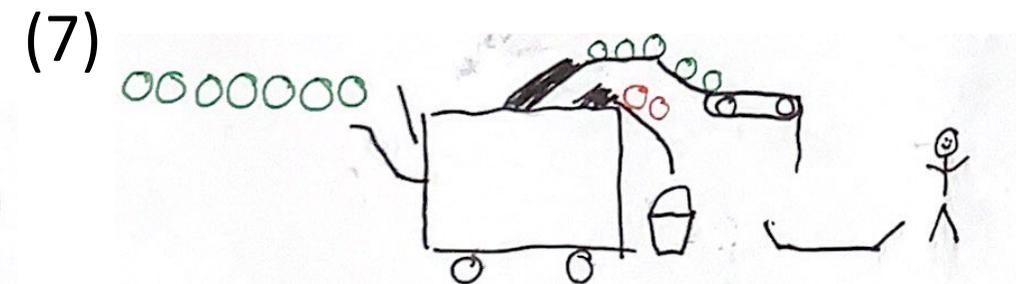
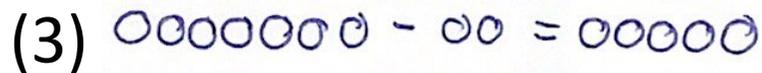
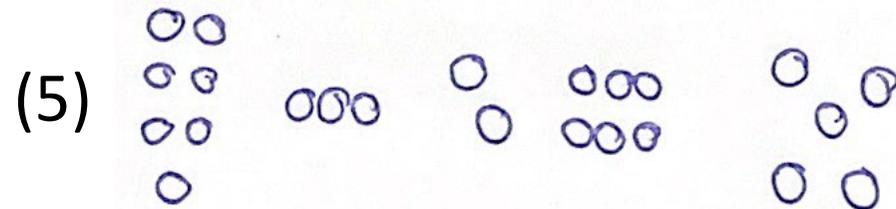
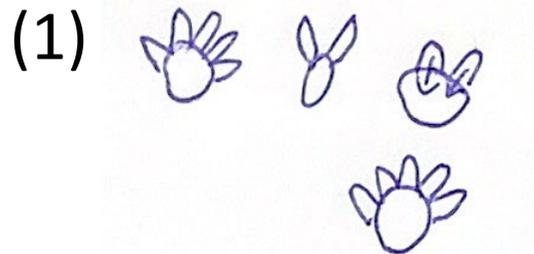
Die Kinder rechnen ja nicht richtig, oder?

Die legen die Aufgaben mit Material, sprechen darüber oder schauen sich solche Bilder gemeinsam an.



## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

Studie von H. Radatz: *Male ein Bild zur Aufgabe „7 - 2 = 5“  
für ein Kind, das unsere Zahlen und Rechenzeichen nicht kennt.*



(Quelle: Radatz 1991)

Erkunden Sie die Bilder der Kinder und notieren ggf. im Padlet:

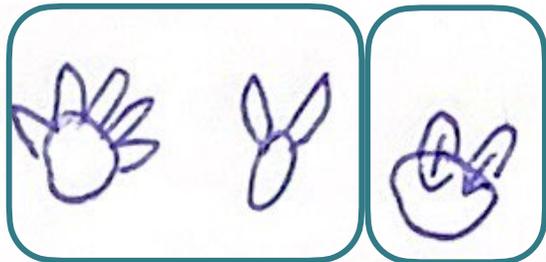
Erkennen Sie eher bedeutungstragende Vorstellungen zur Subtraktion oder erkennen Sie ein eher einseitiges bzw. geringes operatives Verständnis?

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

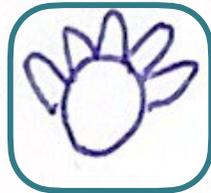
Studie von H. Radatz: *Male ein Bild zur Aufgabe „7 - 2 = 5“  
für ein Kind, das unsere Zahlen und Rechenzeichen nicht kennt.*

### (a) bedeutungstragende dynamische Vorstellungen

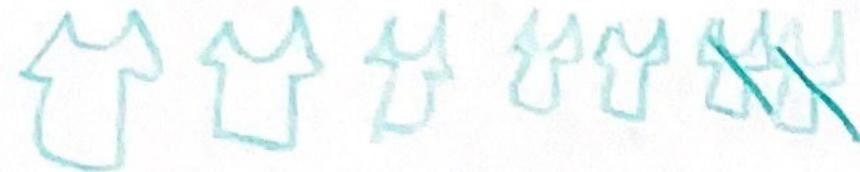
erst 7      2 weg



5 bleiben



weniger werden / wegnehmen



## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

Studie von H. Radatz: *Male ein Bild zur Aufgabe „ $7 - 2 = 5$ “ für ein Kind, das unsere Zahlen und Rechenzeichen nicht kennt.*

(a) bedeutungstragende dynamische Vorstellungen

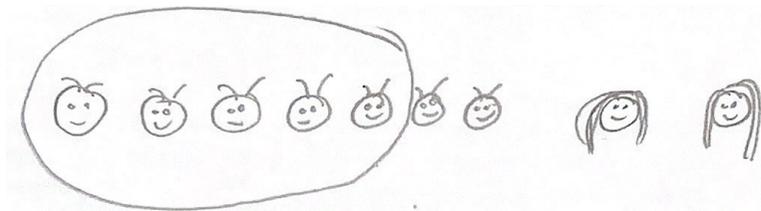
**(b) bedeutungstragende statische Vorstellungen**

enthalten sein



2 von 7 Äpfel sind rot

vergleichen



7 Jungen und 2 Mädchen. Es sind 5 Jungen mehr.

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

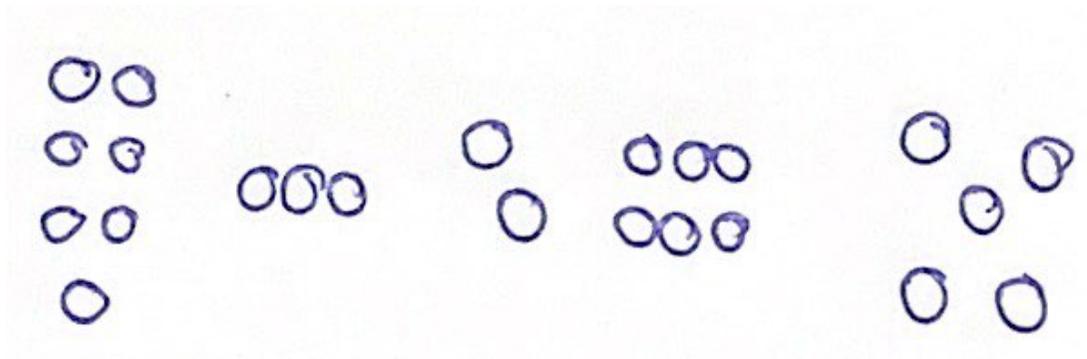
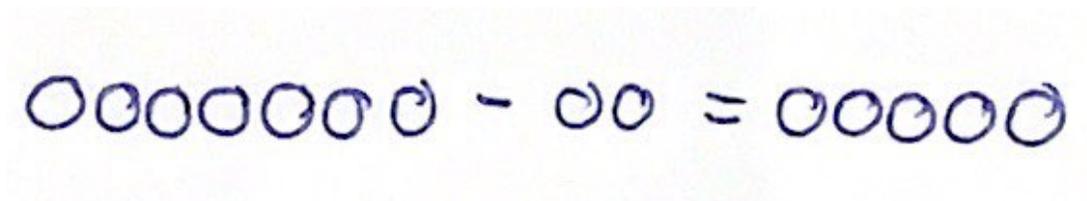
Studie von H. Radatz: *Male ein Bild zur Aufgabe „7 - 2 = 5“ für ein Kind, das unsere Zahlen und Rechenzeichen nicht kennt.*

(a) bedeutungstragende dynamische Vorstellungen

(b) bedeutungstragende statische Vorstellungen

(c) **keine bedeutungstragenden Vorstellungen**

(die Symbole werden verbildlicht oder zwischen den Anzahlen notiert)

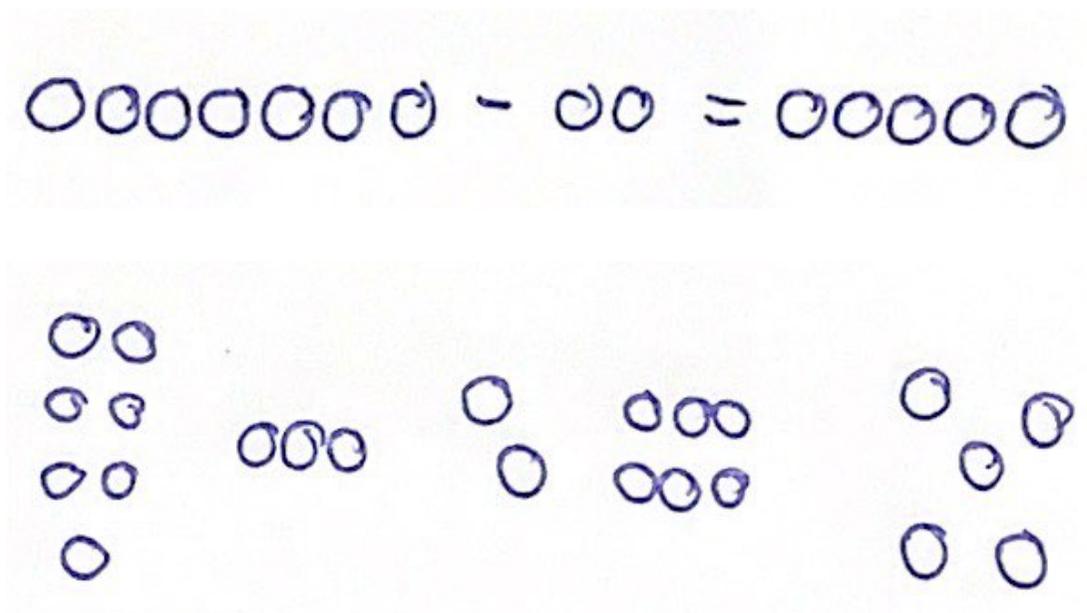


## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

„Typisch für besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen sind **einseitig zählende Vorgehensweisen** beim Rechnen, teilweise ergänzt um **regelgeleitetes Anwenden auswendig gemerkter Zahlenfakten**.

Dabei fehlen häufig

**bedeutungstragende Vorstellungen zu den Rechenoperationen**, oder es werden nur Teilaspekte dieser Operationen erfasst.“



## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

### Wie rechnen manche Kinder folgende Aufgaben?

*Schülerin am Ende der Grundschule*

S: Das sind einfache Aufgaben. Das hier ist (...) Warte ich überlege gerade.

$$12 + 6 = 9$$

L: Lass dir ruhig Zeit.

$$19 + 4 = 14$$

S: (5 Sek.) Das hier ist **9**. (nimmt die Aufgabe  $19 + 4$ ) (25 Sek. Pause) **14**.

Und das (.) **7**.

$$10 + 6 = 7$$

**Nehmen Sie bitte an der Umfrage teil: Wie rechnet die Schülerin?**

- a) zählend, aber mit Zählfehler**
- b) regelgeleitet, aber mit einem individuellen „Rechentrick“**
- c) bedeutungstragend, aber mit einem Rechenfehler**

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

### Wie rechnen manche Kinder folgende Aufgaben?

*Schülerin am Ende der Grundschule*

S: Das sind einfache Aufgaben. Das hier ist (...) Warte ich überlege gerade.

$$12 + 6 = 9$$

L: Lass dir ruhig Zeit.

$$19 + 4 = 14$$

S: (5 Sek.) Das hier ist **9**. (nimmt die Aufgabe  $19 + 4$ ) (25 Sek. Pause) **14**.

Und das (.) **7**.

$$10 + 6 = 7$$

L: Kannst du mir mal erklären, wie du hier auf 7 gekommen bist.

S: 1 und 6 sind 7 und dann habe ich ja nichts mehr, was ich dazu tun kann.

L: Ok, mmm hier hast du gesagt: 12 plus 6 sind 9. Wie hast du das gemacht?

S: Also ich habe einfach 1 und 6 sind ja auch 7 und dann habe ich einfach 2 dazu genommen.

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

### Wie rechnen Kinder am Ende der Grundschule?

TIMSS (2020): Jedes 4. bis 5. Kind am Ende der Grundschule zeigt „unterdurchschnittliche mathematische Kompetenzen“

- Sie verfügen über sog. „*elementares mathematisches Wissen*“
- Sie besitzen „*elementare mathematische Fertigkeiten und Fähigkeiten*“
- Sie lösen nur „*einfache Additions- und Subtraktionsaufgaben*“

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

### Wie rechnen Kinder am Ende der Grundschule?

41 - 17

Schüler:in zu Beginn der Sekundarstufe

S: Minus kann ich gar nicht im Kopf.

L: Wie rechnest du denn Minus?

S: Untereinander, wenn ich darf.

L: Dann mach mal.

S: Das geht ja nicht. (*streckt nacheinander Daumen, Zeige-, Mittel- und Ringfinger und notiert eine 1 unten und eine kleine 1*) Das geht aber nicht irgendwie (...)

L: Was hast du denn gerade überlegt?

S: Ich habe ja die 14, weil 4 minus 7 geht ja nicht, deswegen muss ich ja plus 10 und jetzt muss ich - glaube ich - aus der 1 eine 2 machen? (...) Nee doch nicht. (...)

Mmm, ich weiß nicht. Minus hatten wir jetzt nicht mehr so lange.

		4	1	
	-	1	7	
			1	
<hr/>				
				1

# Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

## Wie rechnen Kinder am Ende der Grundschule?

41 - 17 Schüler:in zu Beginn der Sekundarstufe

S: Minus kann ich gar nicht im Kopf.

zahlreiche Kinder am Ende der Kl. 3 / in Kl. 4 ...  
rechnen nur noch schriftlich

$$\begin{array}{r} 41 \\ - 17 \\ \hline 1 \\ 1 \end{array}$$

**selbst bei Aufgaben, die schneller und einfacher im Kopf gelöst werden könnten**

401 - 397

$$\begin{array}{r} 401 - 397 = \\ \hline 397 + 4 = 401 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \overset{20}{0} \overset{10}{1} \\ - 397 \\ \hline 004 \end{array} \quad \begin{array}{r} 401 \\ - 397 \\ \hline 004 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \overset{3}{0} \overset{10}{1} \\ - 397 \\ \hline 004 \end{array} \quad \begin{array}{r} 401 \\ \phantom{00} \overset{1}{-} \overset{1}{-} 397 \\ \hline 004 \end{array}$$

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

### Wie rechnen Kinder am Ende der Schuleingangsphase?

41 - 17

Schüler:in zu Beginn der 3. Klasse

S: Ich rechne immer in Schritten.

$$\begin{array}{r} 41 - 17 = 24 \\ \hline 41 - 10 = 31 \\ 31 - 7 = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 - 17 = 24 \\ \hline 41 - 10 = 31 \\ 31 - 1 = 30 \\ 30 - 6 = 24 \end{array}$$

zahlreiche Kinder am Ende der Kl. 2 ...

rechnen nur auf **einem**  
**halbschriftlichen Weg,**

gerade wenn im Unterricht nur ein  
Hauptlösungsweg thematisiert wird  
(selbst wenn andere Wege kurz  
erwähnt werden)

$$\begin{array}{r} 41 - 17 = 24 \\ \hline 40 - 10 = 30 \\ 30 - 7 = 23 \\ 23 + 1 = 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 41 - 17 = 24 \\ \hline 41 - 1 = 40 \\ 40 - 6 = 34 \\ 34 - 10 = 24 \end{array}$$

## Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

### Wie rechnen Kinder am Ende der Schuleingangsphase?

11 - 7

Schüler:in am Ende der 1. Klasse

S: Ich weiß das Ergebnis: 4.

oder

S: 11, äh, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4.

oder

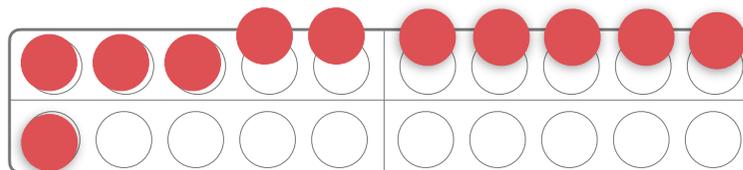
S: 7, also, 8, 9, 10, 11, das sind 4.

zahlreiche Kinder am Ende der Kl. 1 ...  
rechnen nur **zählend** oder  
**wissen automatisiert** das Ergebnis

nur wenige Kinder nutzen Ableitungsstrategien, wie z.B.

(Quelle: Gaidoschik 2010)

11 - 7

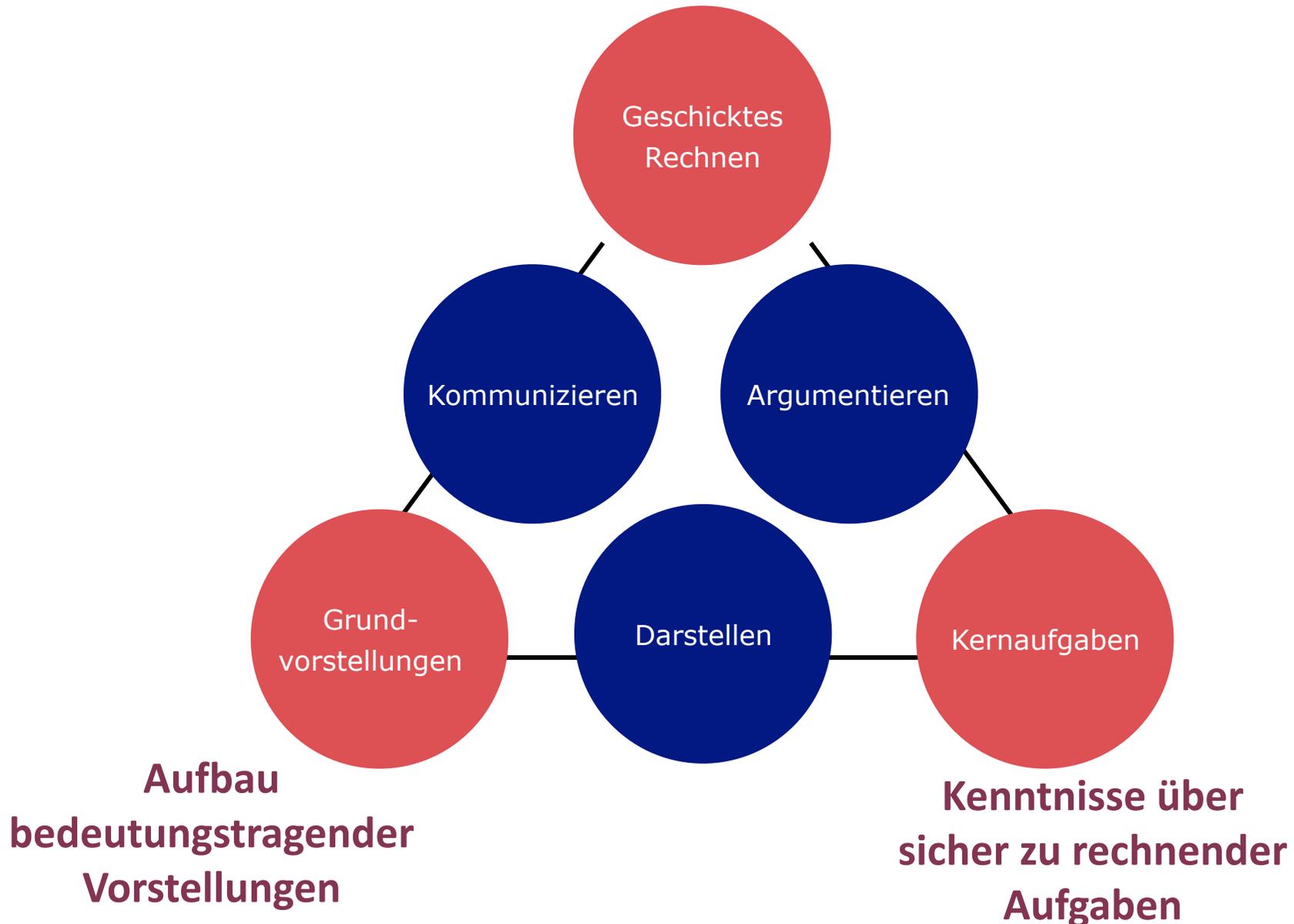


10 - 7 sind 1 weniger als 11 - 7

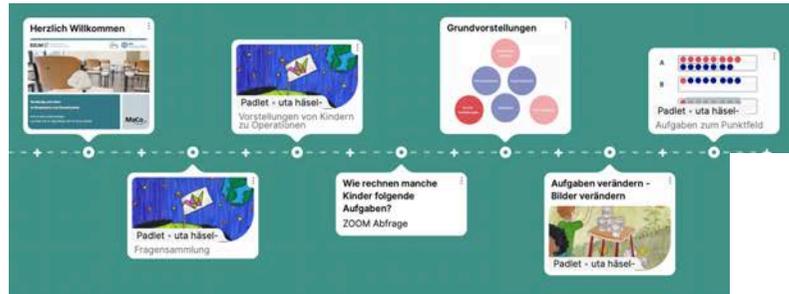
10 - 6 sind das Gleiche wie 11 - 7

# Auftakt: Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

## Bewusstheit für Rechenwege und Flexibilität beim Rechnen



Padlet: <https://padlet.com/haeselweide/vhww422n5ru30ea7>



1 Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

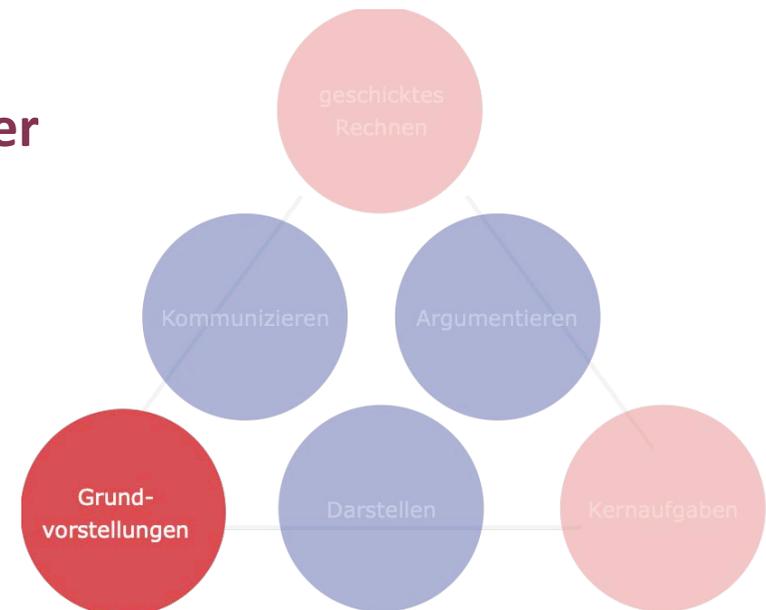
2 Grundvorstellungen

3 Kernaufgaben

4 Geschickt rechnen

5 Produktives Üben

## Aufbau bedeutungstragender Vorstellungen



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern



Die Welt der Dinge ist zugleich Ausgangspunkt wie Zielpunkt des Lernens.

(Quelle: Winter 1994)

**Mathematik**

Zahlen

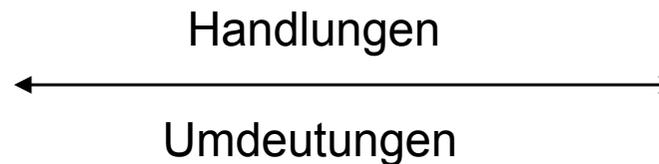


Zahlen



**Reale Welt**

Personen,  
Gegenstände,  
Plättchen



Personen,  
Gegenstände,  
Plättchen

# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

Grund-  
vorstellungen

Ziel: Vorstellungen entwickeln, die Bedeutung haben / Sinn machen ...

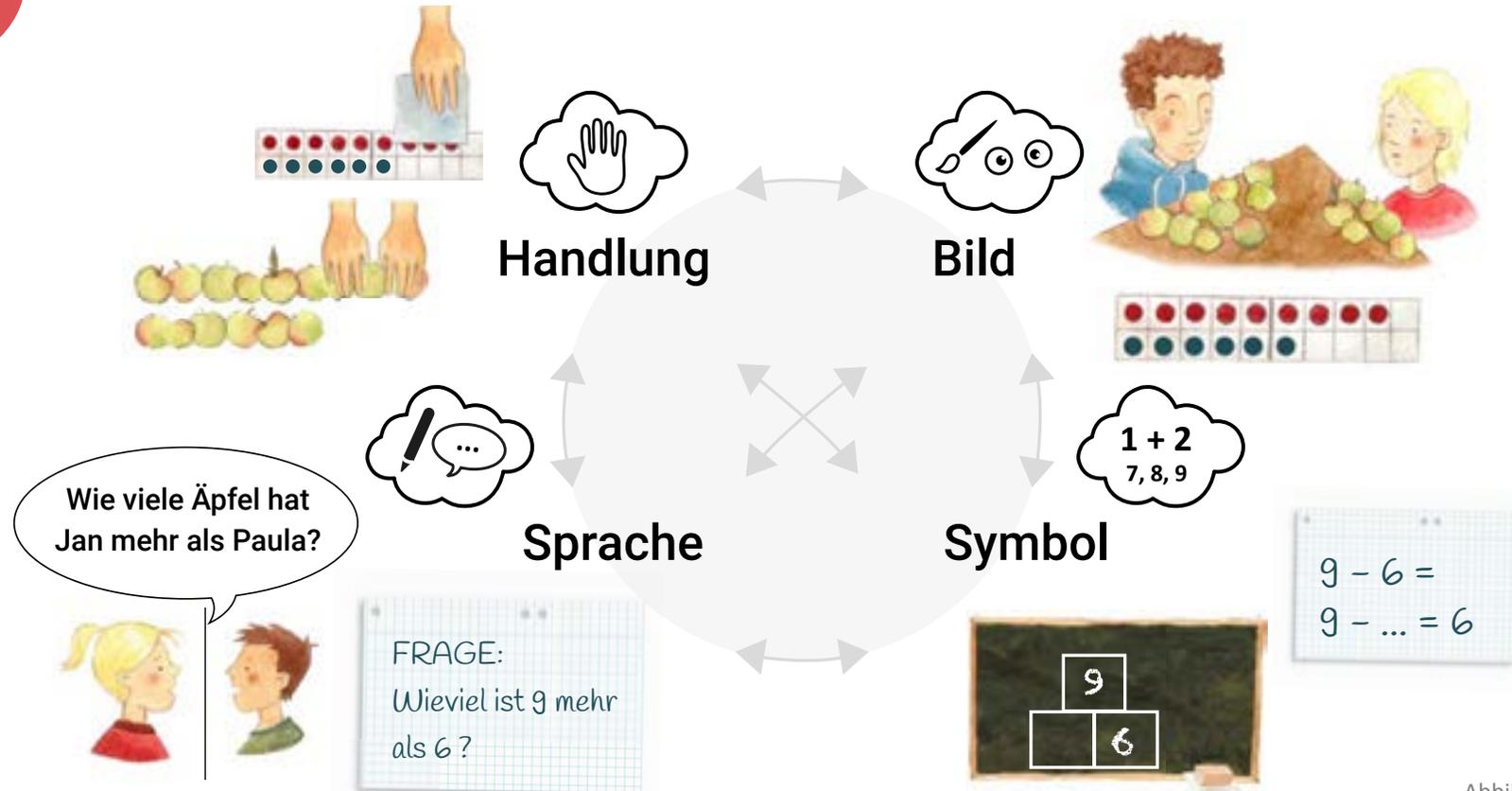


Abbildung: K. Mosen (PIKAS)

„Operationsverständnis zeigt sich in der Fähigkeit, zwischen diesen verschiedenen „Sprachen“ **hin- und herübersetzen** zu können, also **Verbindungen** herstellen zu können zwischen konkreten, häufig in Alltagssprache beschriebenen, (Alltags-) **Situationen** und mathematischen Symbolen und Rechenoperationen“ (Gerster & Schultz 2004, 388).

# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

Grund-  
vorstellungen

Ziel: Vorstellungen entwickeln, die Bedeutung haben / Sinn machen ...

Darstellungen wechseln und **verbinden**

## (a) Kontextorientierung

bei der Erkundung von Zahlen wie von Operationen

v.a. alltagsnahe und sinnstiftende Kontexte aufgreifen

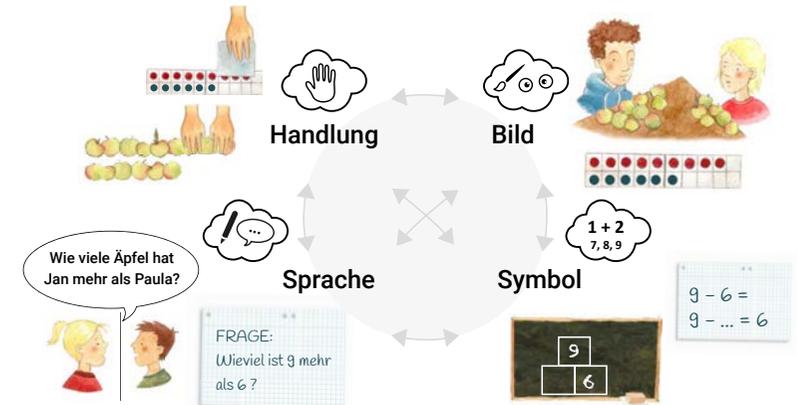
sowie mathematisch-mehrdeutige Erzählsituationen zulassen

## (b) Strukturorientierung

bei der Erkundung von Zahlen wie von Operationen

v.a. strukturell-bedeutsame Anschauungsmitteln aufgreifen

sowie mathematisch-mehrdeutige Deutungs- und Arbeitsweisen zulassen



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

(a) Kontextorientierung      Alltagsituation operativ deuten

Bilder zum mathematische Erzählen nutzen

typisch:

Welche Aufgabe passt?

$8 - 2$

Weniger werden

$6 - 2$

$6 - 3$

Vergleichen

$9 - 3$

$5 - 1$

Ergänzen

$5 - 2$

$2 + 1$

Mehr werden

$4 + 1$

$2 + 2$

Zusammen



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

(a) Kontextorientierung      Alltagsituation operativ deuten

**Bilder zum mathematische Erzählen nutzen**

aber auch:  
**Sinnstiftende Fragen  
zulassen!**

Wie alt wird das  
Geburtstagskind?

Wie viele Kinder ...  
sind eingeladen worden?  
haben Kuchen gegessen?

Warum ist die Flasche voll?  
Wieso sind 2 Gläser leer? ...



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

**(a) Kontextorientierung**      *Alltagssituation operativ deuten*

## Differenziertes Beschreiben und Darstellen

*Paul hat schon zwei mal geworfen. 5 Dosen stehen noch, 2 sind umgefallen.*

*Von den 7 Dosen hat Paul 2 Dosen getroffen.*

*Von den 7 Dosen stehen noch 5 Dosen.*

## Operative Dynamik verbalisieren

*Wie viele Dosen hat er nach dem 1. Wurf getroffen?*

*Wie viele wird er jetzt treffen?*



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

## (a) Kontextorientierung

Alltagsituation operativ deuten

Hilfe?



10

-



4

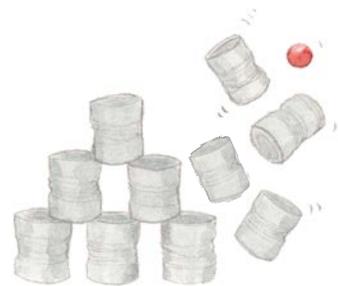
=



6

$$6 + 4 = 10$$

*zusammen 10*



$$10 - 4 = 6$$

$$6 - 4 = 2$$

*6 stehen, 4 fallen um,  
es stehen 2 mehr Dosen  
als auf den Boden liegen*

# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

(a) Kontextorientierung      Alltagsituation operativ deuten

Operative Dynamik erkunden



Padlet: Wie muss das Bild verändert werden, wenn sich die Aufgabe ändert?



$$7 - 2 = 5$$

$$7 - 3 = 4$$

$$7 - 2 = 5$$

$$6 - 2 = 4$$

$$7 - 2 = 5$$

$$8 - 3 = 5$$

$$7 - 2 = 5$$

$$5 - 0 = 5$$

# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

## (a) Kontextorientierung

## in Termen mehrere Rechengeschichten sehen

Pia hat 10 Murmeln.  
2 Murmeln gibt er Leo.

$$10 + 2 = 12$$

10 Kinder sitzen am  
Tisch.  
2 Kinder kommen hinzu.

Paul hat 8 Murmeln.  
2 Murmeln bekommt  
er von Leo.

$$8 + 2 = 10$$

$$12 - 2 = 10$$

Von 12 Kindern gehen  
2 Kinder weg.

$$10 - 2 = 8$$

*Erfinde zu jeder Aufgabe eine Geschichte.*

$$10 + 2 = 12$$

$$8 + 2 = 10$$

$$12 - 2 = 10$$

$$10 - 2 = 8$$

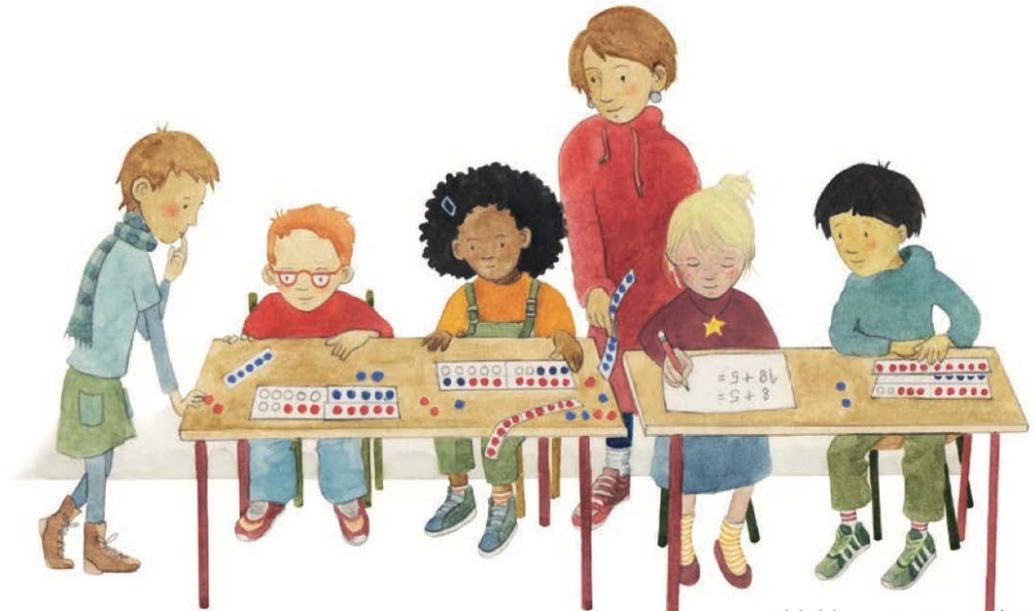
# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

## (b) Strukturorientierung

Aufgaben in Punktebildern sehen

So lernen die Kinder Mathematik!  
Sie müssen Vorstellungen im Kopf  
entwickeln zum  $1+1$  und  $1-1$ !

Und die Kinder können so viele  
unterschiedliche Ideen mit den  
Materialien ausdrücken und sich  
gegenseitig zeigen.



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

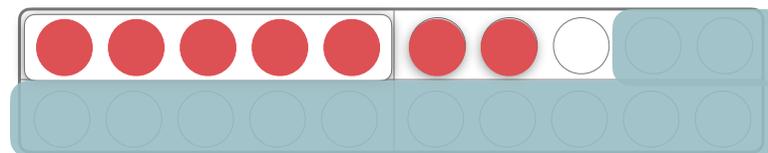
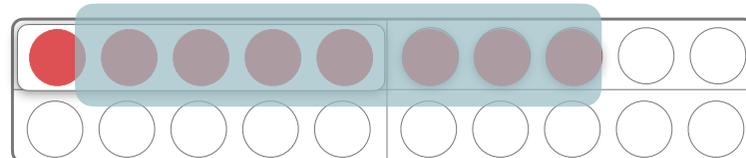
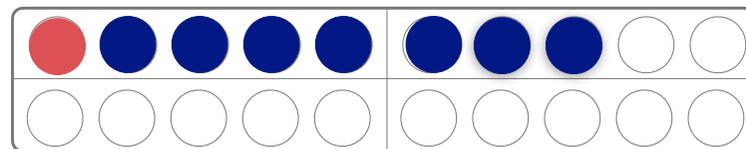
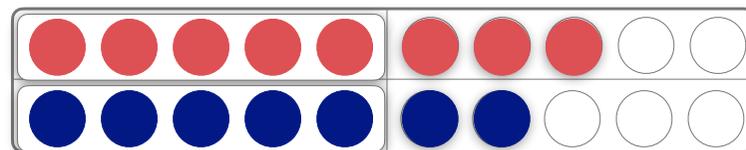
## (b) Strukturorientierung

Aufgaben in Punktebildern sehen

Wählen Sie eine Frage aus  
und notieren Sie im Padlet ...

a) mögliche Aufgaben, die zu  
den Darstellungen passen

b) welche Bilder passen gut zur  
Aufgabe 8 - 7



(markieren Sie bereits notierte mit einem „Herzchen“, wenn Sie diese auch gewählt hätten)

# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

## (b) Strukturorientierung

Aufgaben in Punktebildern sehen

konkret: Finde passende Aufgaben

The diagram shows six ten-frame structures, each with a horizontal line to its right for an answer. The structures are as follows:

- Structure 1: 10 blue circles (5 in each row).
- Structure 2: 10 blue circles (5 in each row).
- Structure 3: 10 blue circles (5 in each row).
- Structure 4: 10 blue circles (5 in each row).
- Structure 5: 10 blue circles (5 in each row).
- Structure 6: 10 blue circles (5 in each row).

The arithmetic problems to be matched are:

- $10 + 3$
- $6 + 6$
- $10 + 2$
- $10 + 9$
- $10 + 5$
- $7 + 7$
- $20 - 1$
- $5 + 5 + 2$
- $3 + 3 + 3$
- $8 + 5$
- $10 - 1$
- $5 + 4$
- $5 + 5 + 5$
- $20 - 6$
- Empty box
- Empty box

# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

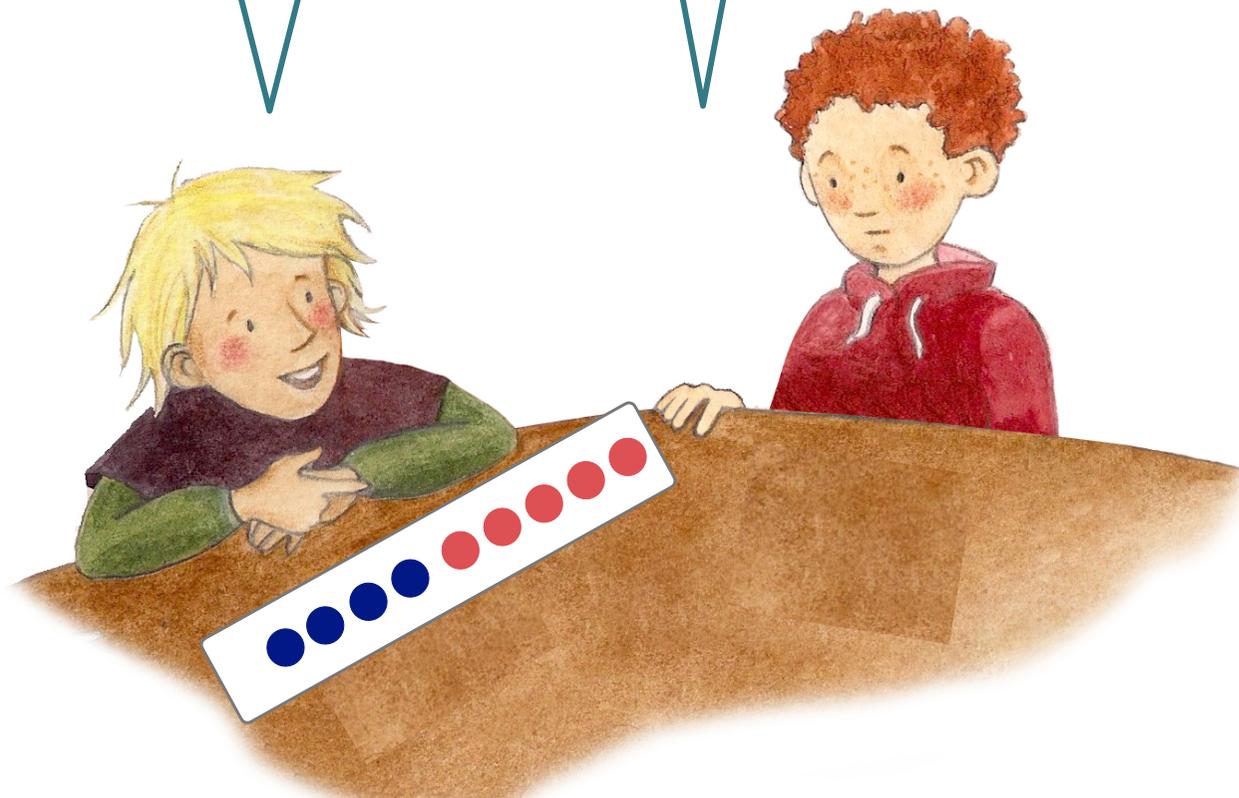
## (b) Strukturorientierung

Aufgaben in Punktebildern sehen

konkret: Erkunde Tauschaufgaben

Ich sehe 5 rote und 4 blaue Plättchen.

Wir können auch die Tauschaufgabe sehen. Erst 4 blaue und dann 5 rote. Es bleiben zusammen 9 Plättchen.



# 1. Grundlegende Operationsvorstellungen nachhaltig sichern

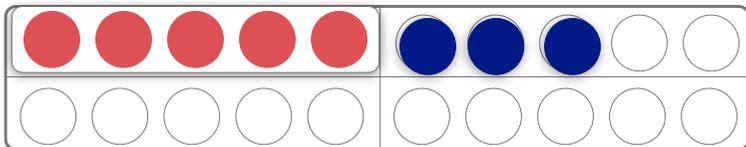
## (b) Strukturorientierung

Aufgaben in Punktebildern sehen

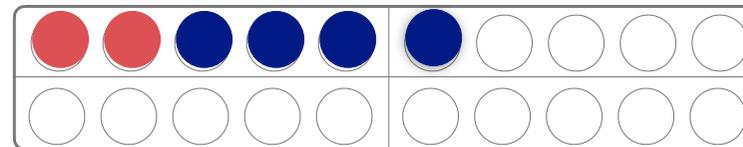
### konkret: Erkunde Tauschaufgaben

- Vertauschungsgesetz (Kommutativgesetz):  $a + b = b + a$

Findet die Tauschaufgabe. Legt und rechnet.



$$5 + 3 = \underline{\quad}$$
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$



$$2 + 4 = \underline{\quad}$$
$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

Welche Aufgabe findest du **einfacher**? Kreuze an.

$9 + 3 = \underline{\quad}$

$4 + 11 = \underline{\quad}$

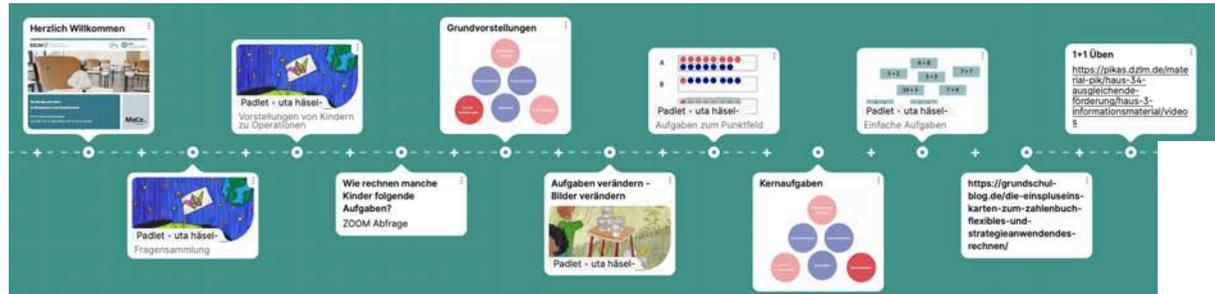
$1 + 7 = \underline{\quad}$

$3 + 9 = \underline{\quad}$

$11 + 4 = \underline{\quad}$

$7 + 1 = \underline{\quad}$

Padlet: <https://padlet.com/haeselweide/vhww422n5ru30ea7>



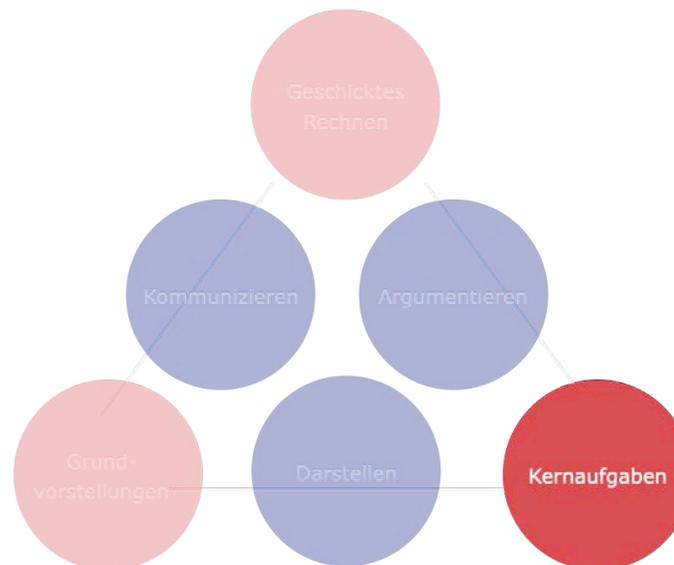
1 Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

2 Grundvorstellungen

3 Kernaufgaben

4 Geschickt rechnen

5 Produktives Üben



**Kenntnisse über  
sicher zu rechnender  
Aufgaben**

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

Kern-  
aufgaben

### Kernaufgaben als Fixpunkte des flexiblen Rechnens

Aufbau eines Repertoires an Aufgabenstellungen, die sicher ausgerechnet werden

**Langfristiges Ziel:** Bildungsstandards Primarstufe (2004, 9):

- die **Grundaufgaben** des Kopfrechnens (Einspluseins, Einmaleins, Zahlzerlegungen) gedächtnismäßig beherrschen,
- deren **Umkehrungen** sicher ableiten und
- diese Grundkenntnisse auf analoge Aufgaben in größeren Zahlenräumen übertragen

**Klasse 1:**

- die **Kernaufgaben des Einspluseins** erkunden und gedächtnismäßig beherrschen,
- deren Umkehrungen (**Kernaufgaben des Einminuseins**) sicher ableiten und
- diese Grundkenntnisse auf **schwierige Aufgaben im kleinen Zahlenraum** übertragen

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

### (a) Einfache Aufgaben entdecken

einfach

6 + 8

5 + 2

3 + 0

7 + 7

10 + 3

7 + 9

7 + 3

4 + 1

14 - 7

10 - 3

3 - 0

16 - 9

13 - 3

4 - 1

14 - 8

- + -

- - -



**Überlegen Sie für Ihre Kinder und notieren ggf. im Padlet:  
Welche Aufgaben sind einfach? Finde einfache Aufgaben.  
Geben Sie Ihrer Aufgabe ggf. eine Überschrift und  
ergänzen Sie diese um weitere Aufgaben.**

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(a) Einfache Aufgaben entdecken **Individuelle Präferenzen setzen**

Einfache Aufgaben

mit Summand 0

$$\begin{array}{l} 0+0=0 \\ 1+1=2 \\ 2+2=4 \\ 3+3=6 \\ 4+4=8 \\ 5+5=10 \\ 1+2=3 \\ 1+3=4 \\ 2+4=6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 5+5=10 \\ 6+4=10 \\ 7+3=10 \\ 8+2=10 \\ 9+1=10 \\ 4+6=10 \\ 3+7=10 \\ 2+8=10 \\ 1+9=10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10+0=10 \\ 9+0=9 \\ 8+0=8 \\ 7+0=7 \\ 6+0=6 \\ 5+0=5 \\ 4+0=4 \\ 3+0=3 \\ 2+0=2 \\ 1+0=1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0+0=0 \\ 1+1=2 \\ 2+2=4 \\ 4+4=8 \\ 3+3=6 \\ 7+1=8 \\ 5+5=10 \\ 5+1=6 \\ 7+7=14 \end{array}$$

mit  
Zehnerzahlen

$$\begin{array}{l} 100+100=200 \\ 20+20=40 \\ 100+300=400 \\ 7+3=10 \\ 4+6=10 \\ 9+10=19 \\ 0+0=0 \\ 200+300=500 \end{array}$$

Verdoppeln

Summe 10

mit kleinen Zahlen /  
Kraft der 5

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

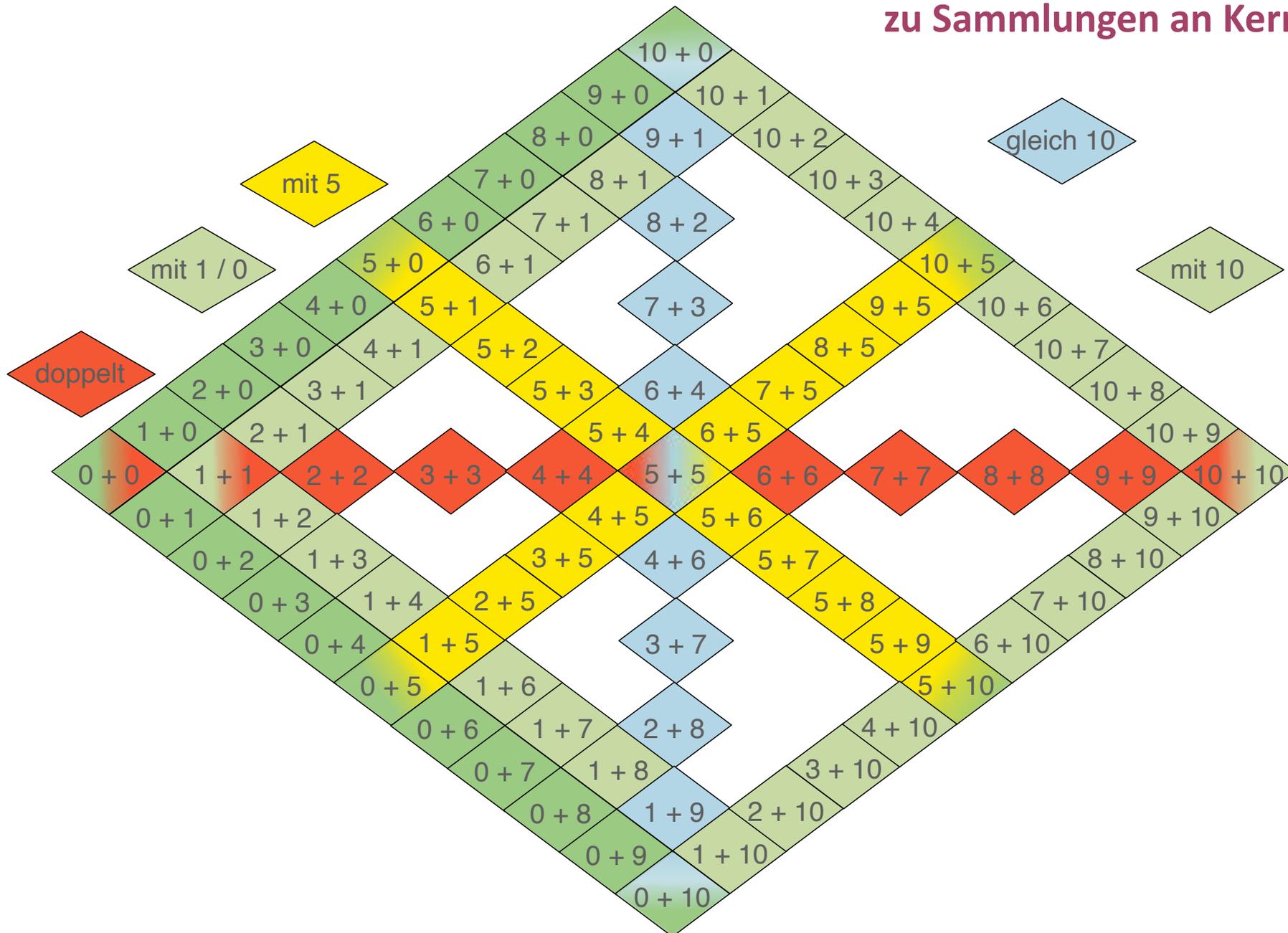
(a) Einfache Aufgaben entdecken Individuelle Präferenzen setzen

mit 5	mit 10	= 10
$5+0=5$	$10+0=10$	$10+0=10$
$5+1=6$	$10+1=11$	$9+1=10$
$5+2=7$	$10+2=12$	$8+2=10$
$5+3=8$	$10+3=13$	$7+3=10$
$5+4=9$	$10+4=14$	$6+4=10$
$5+5=10$	$10+5=15$	$5+5=10$
$5+6=11$	$10+6=16$	$4+6=10$
$5+7=12$	$10+7=17$	$3+7=10$
$5+8=13$	$10+8=18$	$2+8=10$
$5+9=14$	$10+9=19$	$1+9=10$
$5+10=15$	$10+10=20$	$0+10=10$
$5+11=16$	$10+11=21$	
$5+12=17$	$10+12=22$	
$5+13=18$	$10+13=23$	
$5+14=19$	$10+14=24$	
$5+15=20$	$10+15=25$	
$5+16=21$	$10+16=26$	
$5+17=22$	$10+17=27$	
$5+18=23$	$10+18=28$	
$5+19=24$	$10+19=29$	

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

**Individuelle Präferenzen führen zu Sammlungen an Kernaufgaben**



## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

### Lernprinzipien

**inhaltlich ergiebige** und passende Aufgabenstellungen auswählen

**prozessbezogene** mathematische Aktivitäten einbinden

ALLE Kinder ...

gewinnen Erkenntnisse mit dem LegeMaterial: **DARSTELLEN**

Einfach nur irgendein Material als Lernhilfe?



## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

### Lernprinzipien

**inhaltlich ergiebige** und passende Aufgabenstellungen auswählen

**prozessbezogene** mathematische Aktivitäten einbinden

ALLE Kinder ...

gewinnen Erkenntnisse mit dem LegeMaterial: **DARSTELLEN**

Einfach nur irgendein Material als Lernhilfe?



## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

### Lernprinzipien

**inhaltlich ergiebige** und passende Aufgabenstellungen auswählen

**prozessbezogene** mathematische Aktivitäten einbinden

ALLE Kinder ...

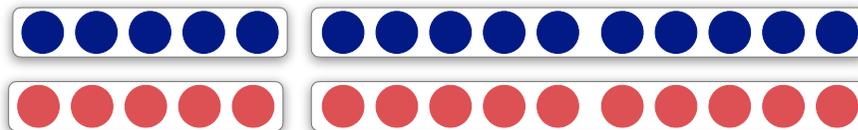
gewinnen Erkenntnisse mit dem LegeMaterial: **DARSTELLEN**

- Materialien behutsam auswählen
- zählende Rechenhilfen wie einzelne Perlen, Würfel oder Plättchen vermeiden
- strukturiertes Material anbieten und Übungen zur Verinnerlichung nutzen

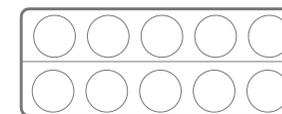
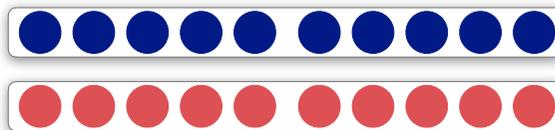
Einer  
Plättchen



Fünfer-  
Streifen



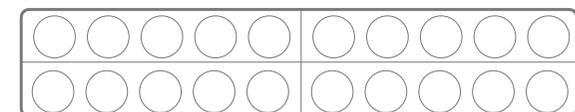
Zehner-  
Streifen



10er-Felder



20er-Feld



## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

### Lernprinzipien

**inhaltlich ergiebige** und passende Aufgabenstellungen auswählen

**prozessbezogene** mathematische Aktivitäten einbinden

ALLE Kinder ...

gewinnen Erkenntnisse mit dem LegeMaterial: **DARSTELLEN**

beschreiben ihre Handlungen und Ideen: **KOMMUNIZIEREN**

erörtern und begründen ihre Einsichten: **ARGUMENTIEREN**

setzen sich mit problemhaltigen Fragestellungen auseinander: **PROBLEMLÖSEN**

verbinden mathematische Inhalte mit Kontexten: **MODELLIEREN**

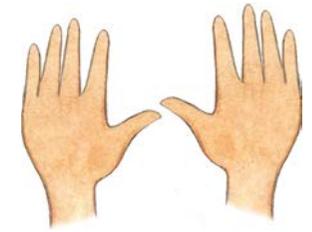
**d.h. Vermeidung einer Praxis**, die individuelle Förderung

als „Beschäftigung“ von Kindern mit Aufgaben

(Gefahr: Arbeit mit Lernheften und Themenheften) und

als „Unterstützung des schlichten Auswendiglernens“ versteht

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben



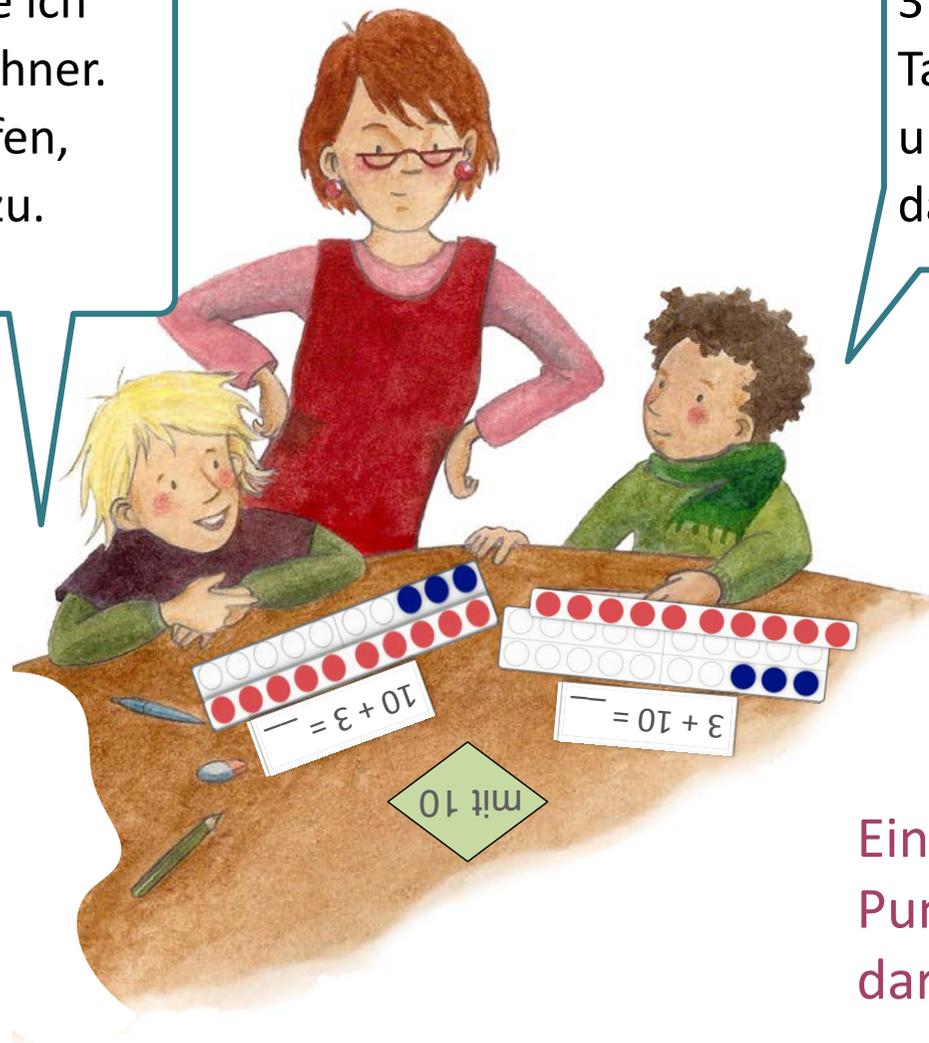
(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

mit 10

*Zehnerstreifen dazu legen*

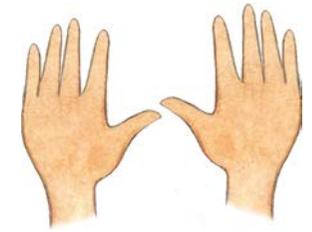
Aufgaben mit 10 lege ich schnell mit einem Zehner. Erst den Zehnerstreifen, dann 3 Plättchen dazu.

$3 + 10$  ist die Tauschaufgabe. Das sind 3 und einfach ein Zehner dazu.



Einfache Zahlstrukturen am Punktefeld mit Legematerial darstellen und beschreiben

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben



(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

10

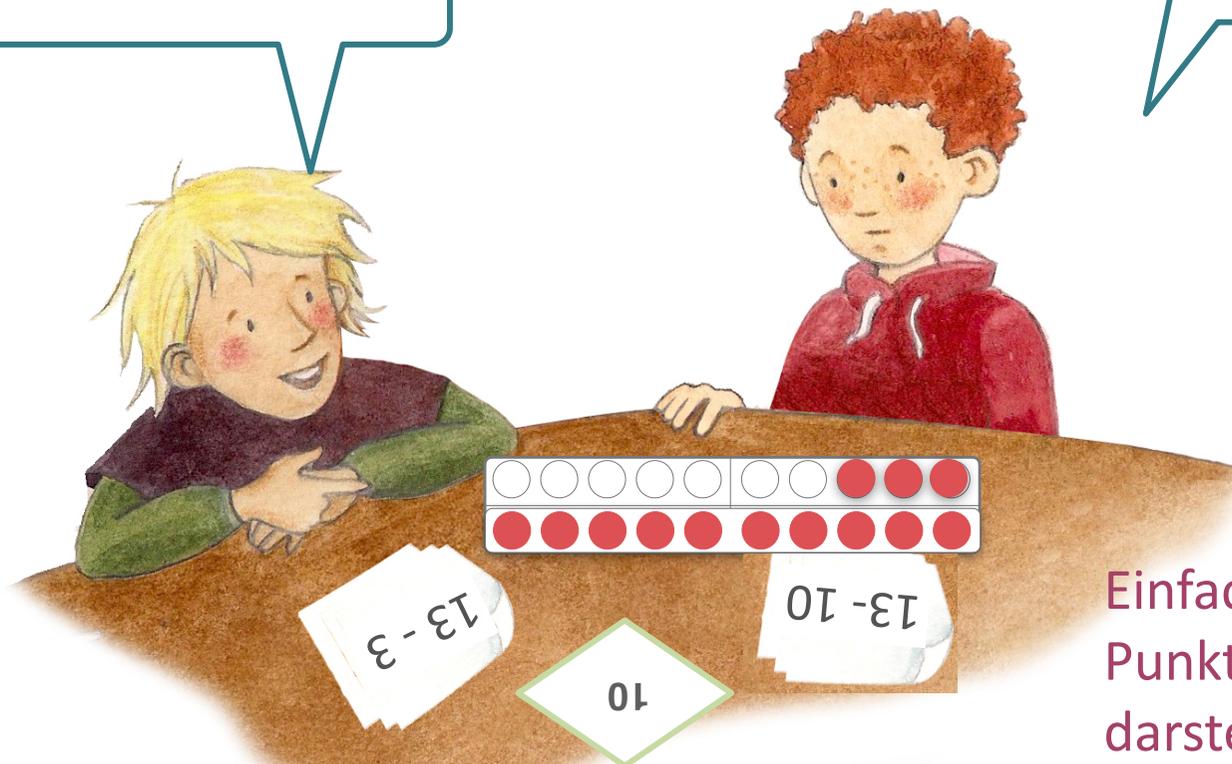
*Zehnerstreifen wegnehmen / abdecken*

13 - 3.

Ich nehme unten die 3  
Plättchen weg.  
Der Zehner bleibt übrig.

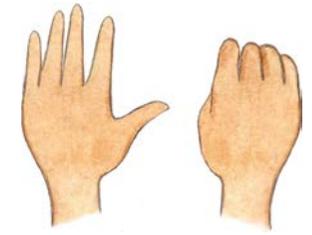
13 - 10.

Ich nehme den Zehner weg.  
Dann bleiben die 3  
Plättchen übrig.



Einfache Zahlstrukturen am  
Punktefeld mit LegeMaterial  
darstellen und beschreiben

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben



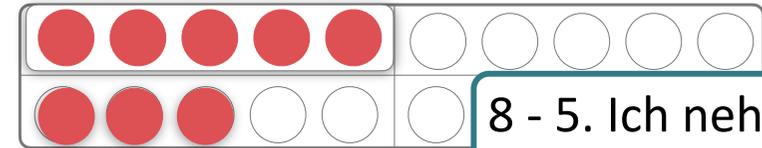
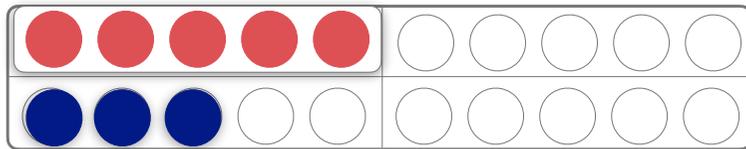
(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden



*hinzulegen*

*Fünferstreifen*

*wegnehmen*



Ich sehe 5 und 3.  
Eine Aufgabe mit 5.



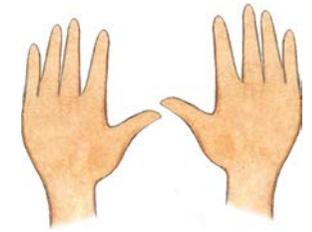
8 - 3. Ich nehme nur die  
Plättchen weg und der  
Fünfer bleibt übrig.



8 - 5. Ich nehme  
schnell den  
Fünfer weg und  
die 3 Plättchen  
bleiben übrig.



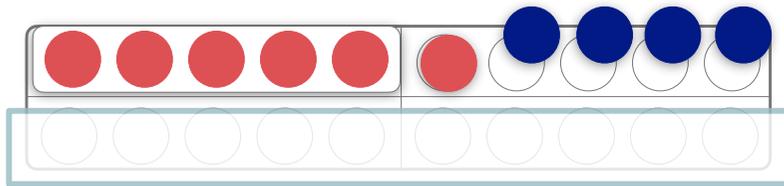
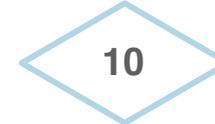
## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben



(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden

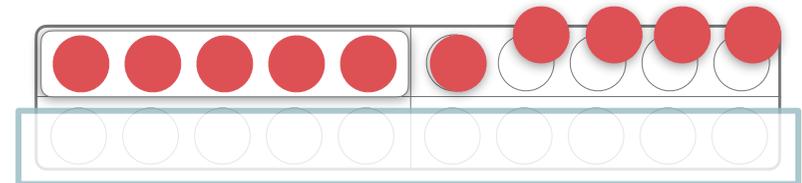


*Zehner zerlegen*



**Zehnerpartner**

- 5 und 5
- 6 und 4
- 7 und 3
- 8 und 2
- 9 und 1
- 10 und 0



Ich sehe 6.  
Ich mache den Zehner voll. Es fehlen noch 4.

Ich nehme 4 von 10 weg.  
Ich denke an den Zehnerpartner von 4.



**Sprachsensibler Unterricht** bedeutet:  
bedeutungsbezogene Sprache aktivieren

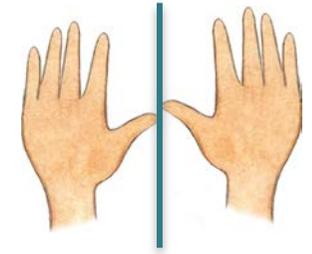


$$6 + 4 = 10$$



## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

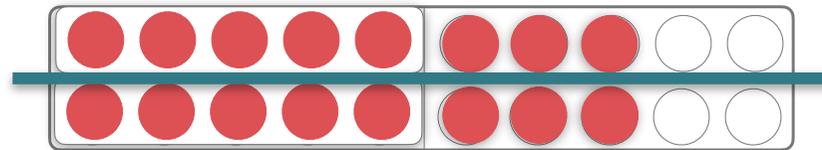
(b) Einfache Aufgaben sammeln und erkunden



*Verdoppeln und Halbieren*



Ich sehe 6 und lege genau die Anzahl noch einmal, also 6 plus 6.



Ich sehe 12 und zerlege die Anzahl in zwei gleich große Mengen, in 6 und 6.

$$6 + 6 = 12$$

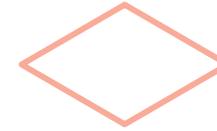
$$12 = 6 + 6$$



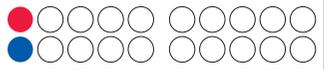
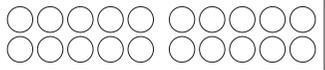
## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

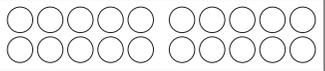


## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

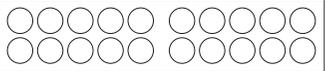


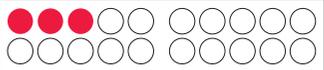
*Verdoppeln mit dem Fünfertrick*

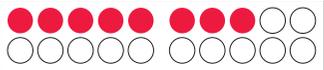
	$1+1 =$		$4+4 =$
---	---------	---	---------

	_____		_____
---	-------	---	-------

	$2+2 =$		_____
---	---------	---	-------

	_____		_____
---	-------	---	-------

	$3+3 =$
---	---------

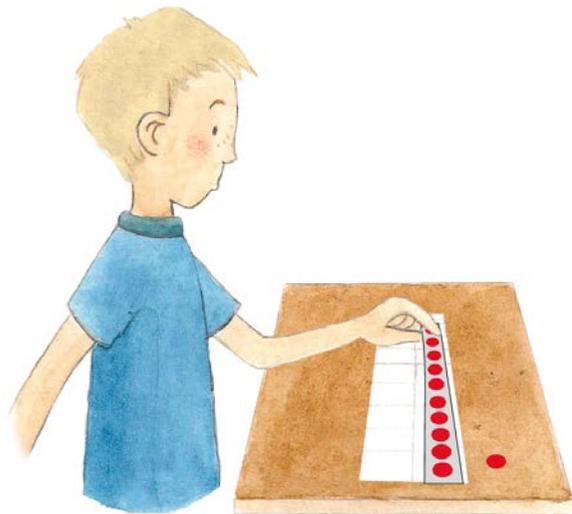
	_____
---	-------

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben vertiefend üben: Sicherheit gewinnen

bewusstes Handeln, Sehen, Sprechen und Verinnerlichen üben

1) konkret legen und beobachten



3) gezielt  
Vorstellungsbild  
aufrufen



Lege einen Zehnerstreifen in  
die obere Reihe des Zwanzig-  
gerfelds.

2) einem Partner mit  
und ohne Sichtfeld  
beschreiben



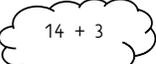
## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

### (b) Einfache Aufgaben vertiefend üben: Sicherheit gewinnen

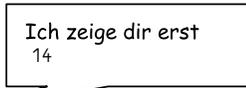
### bewusstes Handeln, Sehen, Sprechen und Verinnerlichen üben

Stellt die Trennwand zwischen euch auf den Tisch.

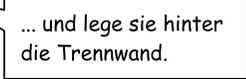
- a)
1. Wähle eine Plus-Aufgabe aus dem Aufgabenpool (S. 38), aber verrate sie nicht.
  2. Zeige deinem Partner die erste Zahl und lege sie hinter die Trennwand.

  $14 + 3$

 Tara

 Ich zeige dir erst  
14



 ... und lege sie hinter  
die Trennwand.



 Rico

3. Zeige deinem Partner die zweite Zahl und lege sie hinter die Trennwand.

 Tara

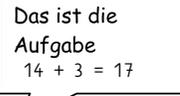
 Dann zeige ich dir  
3...



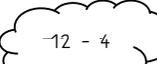
 ... und lege sie auch  
hinter die Trennwand.



 Rico

 Das ist die  
Aufgabe  
 $14 + 3 = 17$

- b)
1. Wähle eine Minus-Aufgabe aus dem Aufgabenpool, aber verrate sie nicht.
  2. Zeige deinem Partner die erste Zahl und lege sie hinter die Trennwand.

  $12 - 4$

 Tara

 Ich zeige dir 12 ..



 ... und lege sie hinter  
die Trennwand.



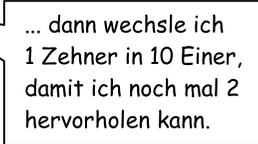
 Rico

3. Hole dann die zweite Zahl hinter der Trennwand hervor und zeige sie deinem Partner.

 Tara

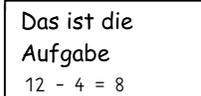
 Ich hole 2 hervor...



 ... dann wechsele ich  
1 Zehner in 10 Einer,  
damit ich noch mal 2  
hervorholen kann.



 Rico

 Das ist die  
Aufgabe  
 $12 - 4 = 8$

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben vertiefend üben: Sicherheit gewinnen

**Aufgabenkarten zum Rechnen**  
und zum **Kontrollieren**

Erklärvideo:

1+1 lernen und verstehen:

Vom (Er-)Zählen zum Auswendig-Wissen

$$3 + 7$$

$$3 + 5$$

$$3 + 10$$

$$3 + 3$$

gleich 10

$$3 + 7 = 10$$



mit 5

$$3 + 5 = 8$$



mit 10

$$3 + 10 = 13$$



doppelt

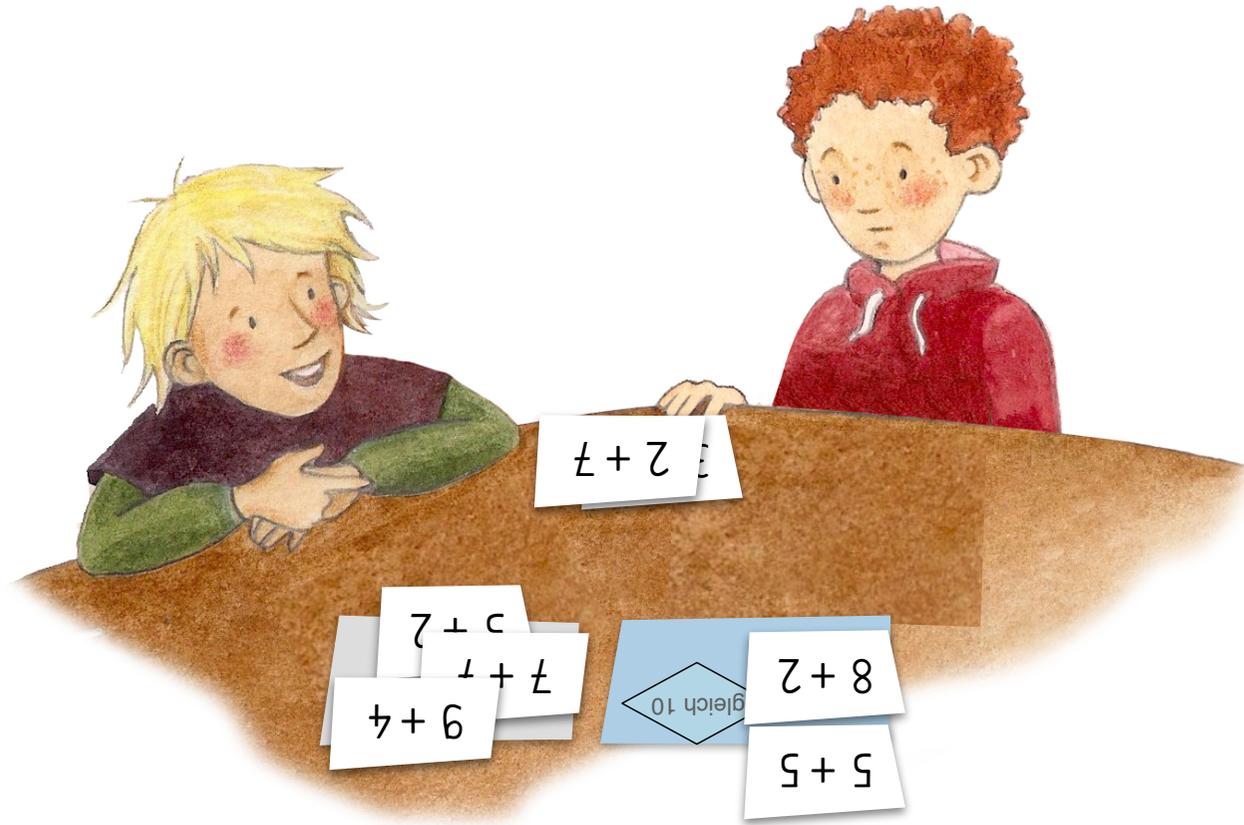
$$3 + 3 = 6$$



## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben vertiefend üben: Sicherheit gewinnen

### Aufgabenkarten zum Sortieren



Quelle: Grundschulblog, © Ernst Klett Verlag GmbH: <https://grundschul-blog.de/die-einspluseins-karten-zum-zahlenbuch-flexibles-und-strategieanwendendes-rechnen/>

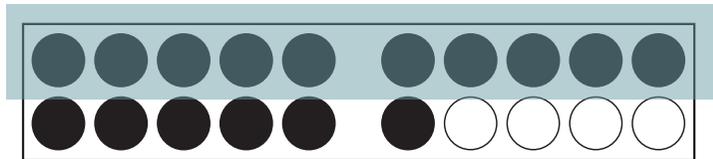
### Blitzrechnen

Quelle: [https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus\\_3\\_-\\_Umgang\\_mit\\_Rechenschwierigkeiten/UM/Blitzrechnen-Plakate/2017\\_BmitZB\\_1bis4\\_A4.pdf](https://pikas.dzlm.de/pikasfiles/uploads/upload/Material/Haus_3_-_Umgang_mit_Rechenschwierigkeiten/UM/Blitzrechnen-Plakate/2017_BmitZB_1bis4_A4.pdf)  
Bilder aus: Wittmann, Müller, Nührenbörger, Schwarzkopf: Das Zahlenbuch 1 © Ernst Klett Verlag GmbH, Stuttgart 2017; zusammengestellt im Mai 2017 © PIK AS ([www.pikas.dzlm.de/](http://www.pikas.dzlm.de/))

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben vertiefend üben: Sicherheit gewinnen

### Zahlbenbilder zum Rechnen



$$16 - 10 = 6$$

$$16 - 1 = 15$$

$$16 - 6 = 10$$

**Zehner weg**

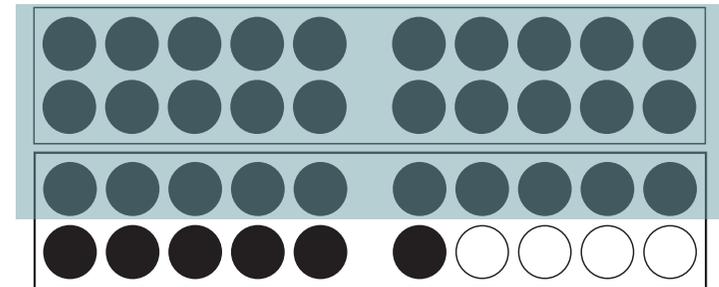
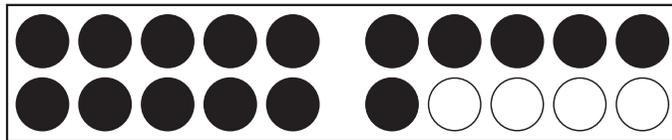
**1 weg**

**Einer weg**

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

(b) Einfache Aufgaben vertiefend üben: Sicherheit gewinnen

### Zahlbenbilder zum Rechnen



$$16 - 10 = 6$$

$$16 - 1 = 15$$

$$16 - 6 = 10$$

**Zehner weg**

**1 weg**

**Einer weg**

$$36 - 30 = 6$$

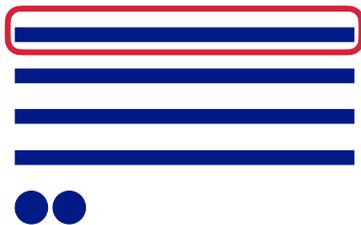
$$36 - 1 = 35$$

$$36 - 6 = 30$$

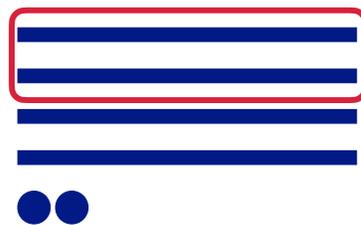
## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

Einfache Aufgaben im größeren Zahlenraum

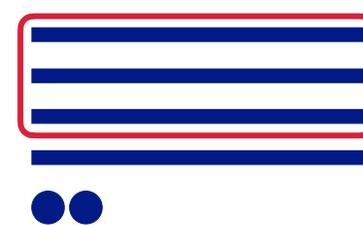
Einfache Aufgaben darstellen und strukturieren



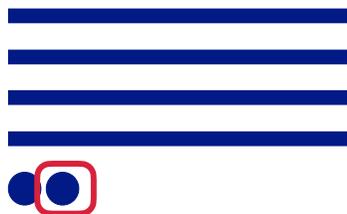
$$42 - 10 = \underline{\quad}$$



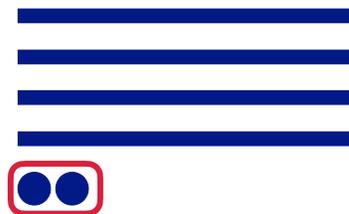
$$42 - 20 = \underline{\quad}$$



$$42 - 30 = \underline{\quad}$$

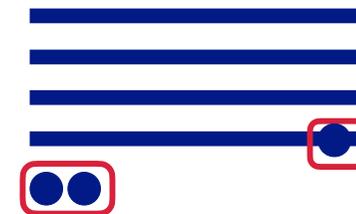


$$42 - 1 = \underline{\quad}$$



$$42 - 2 = \underline{\quad}$$

*Zehner anknabbern*



$$42 - 3 = \underline{\quad}$$

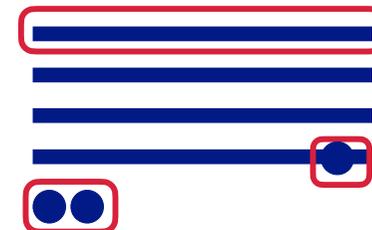
## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

Einfache Aufgaben im größeren Zahlenraum

Einfache Aufgaben darstellen und strukturieren

$$\begin{array}{r} 42 - 13 = 29 \\ \hline 40 - 10 = 30 \\ 2 - 3 = -1 \end{array}$$
$$\begin{array}{r} 42 - 13 = 30 - 1 = 29 \\ \hline 40 - 10 \\ 2 - 3 \end{array}$$

*Zehner anknabbern*



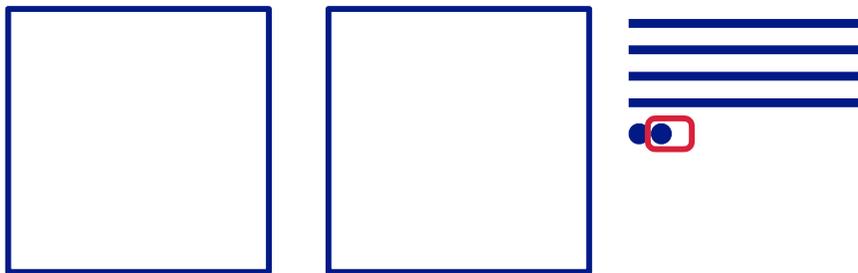
$$42 - 3 = \underline{\quad}$$

## 2. Einfache Zahlstrukturen werden zu einfachen Aufgaben

Einfache Aufgaben im größeren Zahlenraum

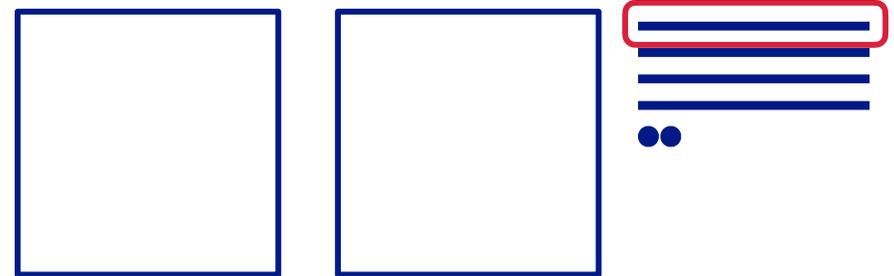
Einfache Aufgaben darstellen und strukturieren

*Nur Einer*



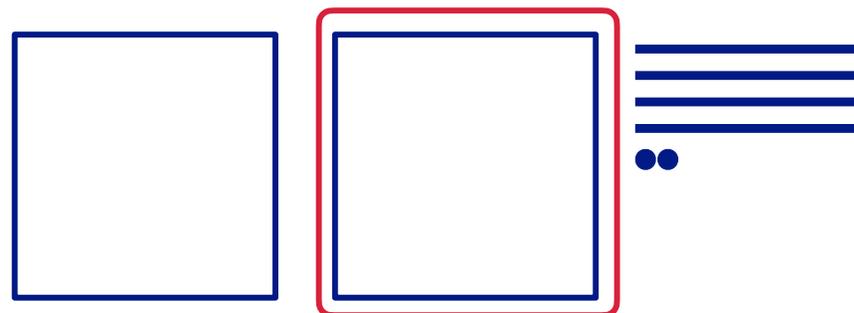
$$242 - 1 = \underline{\quad}$$

*Nur Zehner*



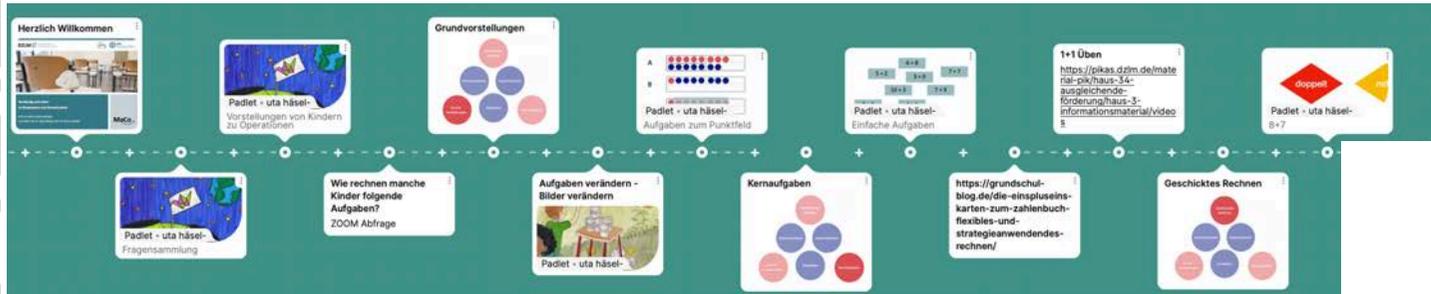
$$242 - 10 = \underline{\quad}$$

*Nur Hunderter*



$$242 - 100 = \underline{\quad}$$

Padlet: <https://padlet.com/haeselweide/vhww422n5ru30ea7>



1 Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

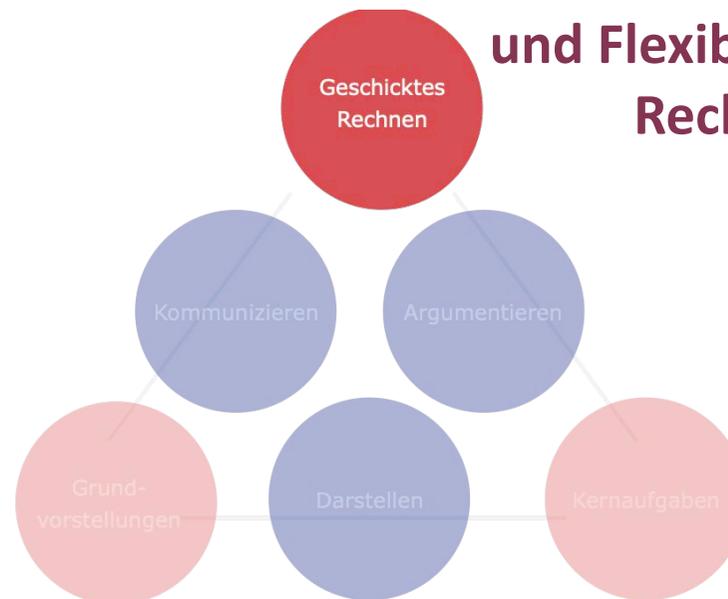
2 Grundvorstellungen

3 Kernaufgaben

4 Geschickt rechnen

5 Produktives Üben

**Bewusstheit für Rechenwege  
und Flexibilität beim  
Rechnen**



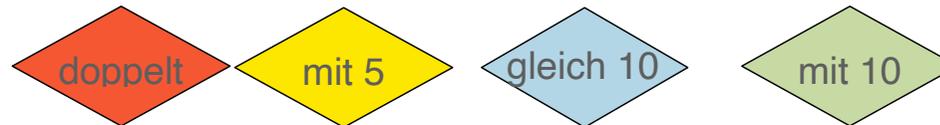
### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Schwierige Aufgaben:** Freiheit bei der Erkundung individueller Rechenwege

Wie rechnest du?

$$8 + 7$$

Achte auf



Padlet: <https://padlet.com/haeselweide/vhwv422n5ru30ea7>



**Überlegen Sie für Ihre Kinder und notieren ggf. im Padlet:**

**Wie kann die Aufgabe mit Hilfe der einfachen Aufgaben gerechnet werden?**

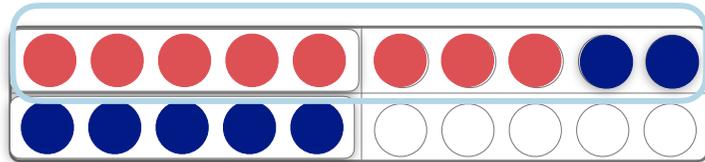
**Notieren Sie mögliche Rechenwege oder**

**stellen Sie diese mit einem Zahlenbild dar oder**

**beschreiben Sie diese mit möglichen “Kinderworten”**

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

Schwierige Aufgaben: Freiheit bei der Erkundung individueller Rechenwege



$$8 + 7$$

über den Zehner

$$8 + 2 + 5$$

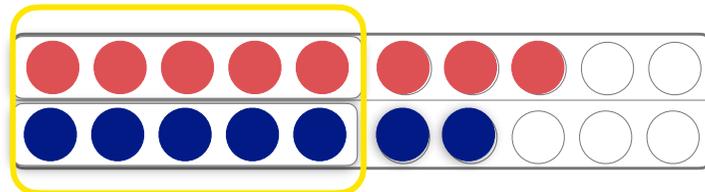
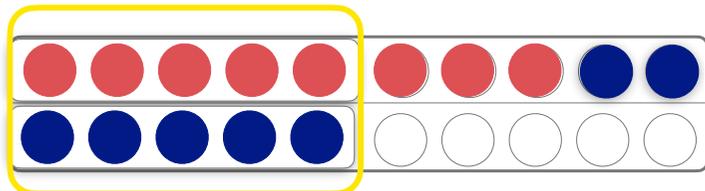
$$8 + 7 = 8 + (2 + 5) = (8 + 2) + 5 = 10 + 5$$

- **Verbindungsgesetz (Assoziativgesetz):**  
 $a + (b + c) = (a + b) + c$

mit Fünfern

$$5 + 5 + 3 + 2$$

$$8 + 7 = (5+3) + (5+2) = (5+5) + (2+3) = 10 + 5$$



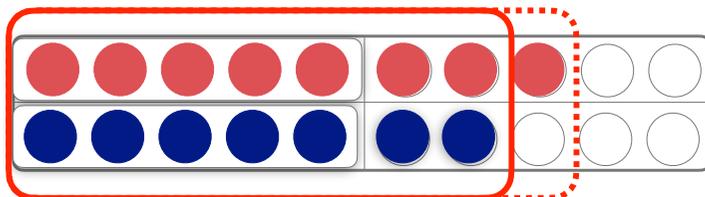
Verdoppeln

$$7 + 7 + 1$$

$$8 + 7 = (7+1) + 7 = (7+7) + 1 = 14 + 1$$

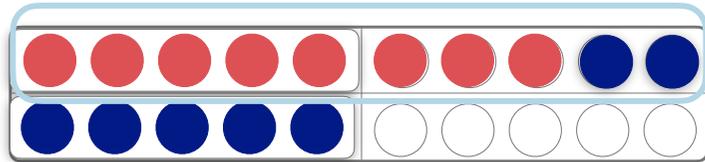
$$8 + 8 - 1$$

$$8 + 7 = 8 + (8-1) = (8+8) - 1 = 16 - 1$$



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

Schwierige Aufgaben: Freiheit bei der Erkundung individueller Rechenwege



$$8 + 7$$

$$8 + 2 + 5$$

*gegenseitiges Verändern / Hilfsaufgabe*

$$8 + 7 = (8+2) + (7-2) = 10 + 5$$

$$8 + 7 = 8 + (2+5) = (8+2) + 5 = 10 + 5$$

$$8 + 7 // 10 + 7 = 17 \text{ oder } 8 + 10 = 18$$

- **Konstanzgesetz:  $a + b = (a \pm c) + (b \mp c)$**

gilt auch bei der Subtraktion: **gleichsinniges** Verändern

- **$a - b = (a \pm c) - (b \pm c)$**

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Schwierige Aufgaben:** Freiheit bei der Erkundung individueller Rechenwege

Die Rechengesetze

stehen zwar fest, „aber der Natur mathematischer Gesetze entsprechend

**ist ihre Anwendung frei.**

Nicht nur der Unterricht in der Grundschule sondern auch der spätere Algebraunterricht profitiert davon, dass die Kinder verschiedene Rechenwege kennenlernen.“

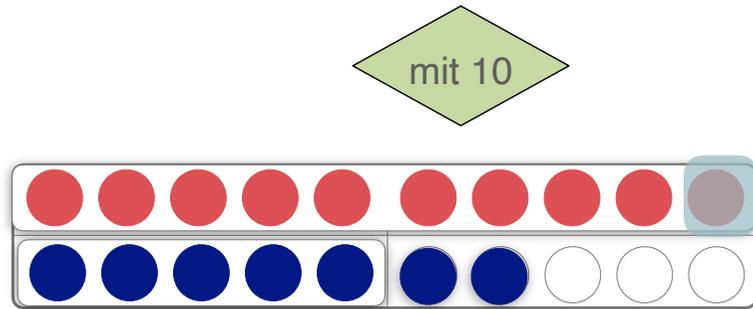
(Nührenbörger et al. 2017, 70)

**Wie lernen Kinder in der ersten Klasse die „freie Anwendung“  
der Rechengesetze beim Erkunden von Rechenwegen?**



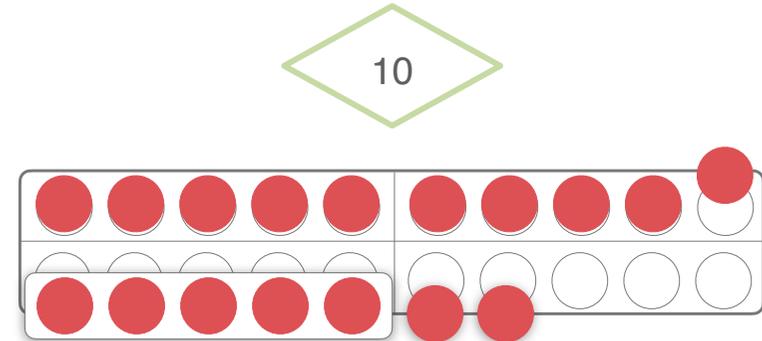
### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Basis:** Nachbaraufgaben darstellen am Punktefeld und beschreiben



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$9 + 7 = \underline{\quad}$$



$$\underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

$$17 - 8 = \underline{\quad}$$



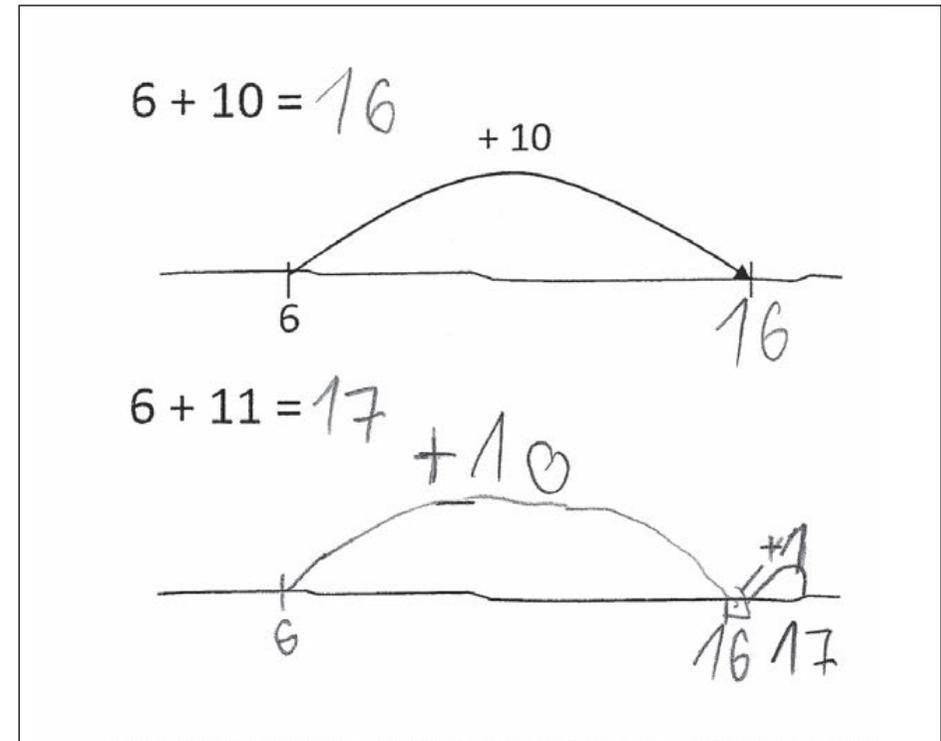
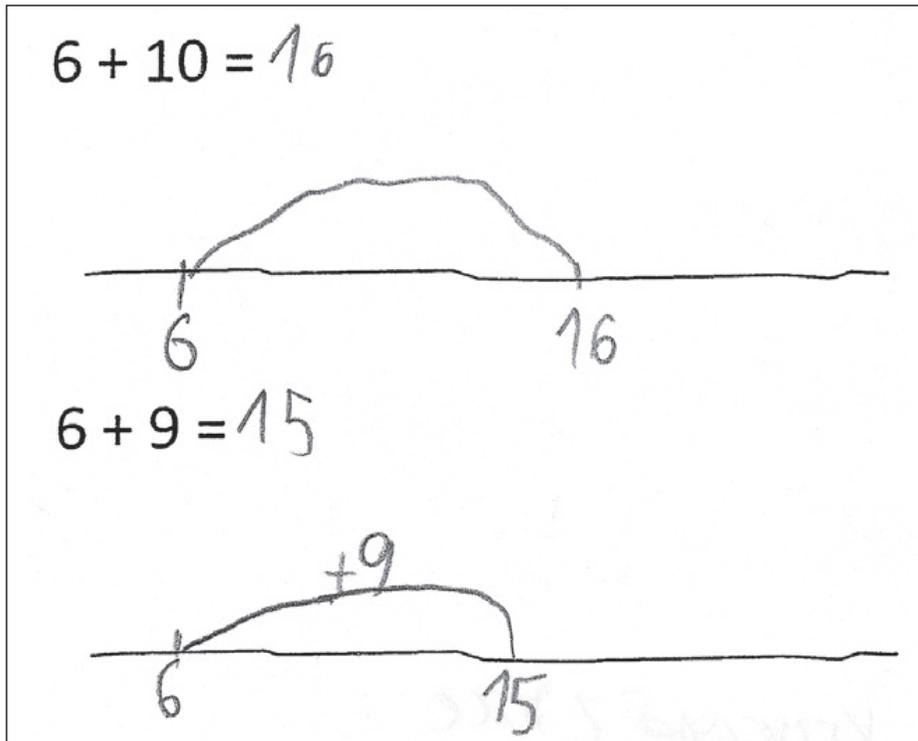
Bei  $9 + 7$  denke ich an die Nachbaraufgabe mit 10.  
 $9 + 7$  ist einer weniger als  $10 + 7$ .



Bei  $17 - 8$  denke ich an die Nachbaraufgabe  $17 - 7$ .  
Ich nehme 1 mehr weg.  
Also ist das Ergebnis um 1 kleiner als 10.

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Basis:** Nachbaraufgaben darstellen am Rechenstrich



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Basis:** Nachbaraufgaben auswählen

#### Nachbaraufgaben - Karten

18.1 **A**

Kreuze die leichteste Aufgabe an!  
Rechne diese zuerst!



$18 - 8 = \underline{\quad}$

$18 - 7 = \underline{\quad}$

18.1 **B**

Kreuze die leichteste Aufgabe an!  
Rechne diese zuerst!



$17 - 11 = \underline{\quad}$

$17 - 10 = \underline{\quad}$

© 2013 Kallmeyer in Verbindung mit Klett - Friedrich Verlag GmbH | Alle Rechte vorbehalten  
Materialien zur: **Ablösung vom zählenden Rechnen**

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Basis:** Nachbaraufgaben eigenständig finden

#### Nachbaraufgaben - Karten

18.2 C

Welche Aufgabe hilft dir?



© 2013 Kallmeyer in Verbindung mit Klett - Friedrich Verlag GmbH | Alle Rechte vorbehalten  
Materialien zu: **Ablösung vom zählenden Rechnen**

$16 - 7 = \underline{\quad}$

$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

18.2 D

Welche Aufgabe hilft dir?



© 2013 Kallmeyer in Verbindung mit Klett - Friedrich Verlag GmbH | Alle Rechte vorbehalten  
Materialien zu: **Ablösung vom zählenden Rechnen**

$18 - 9 = \underline{\quad}$

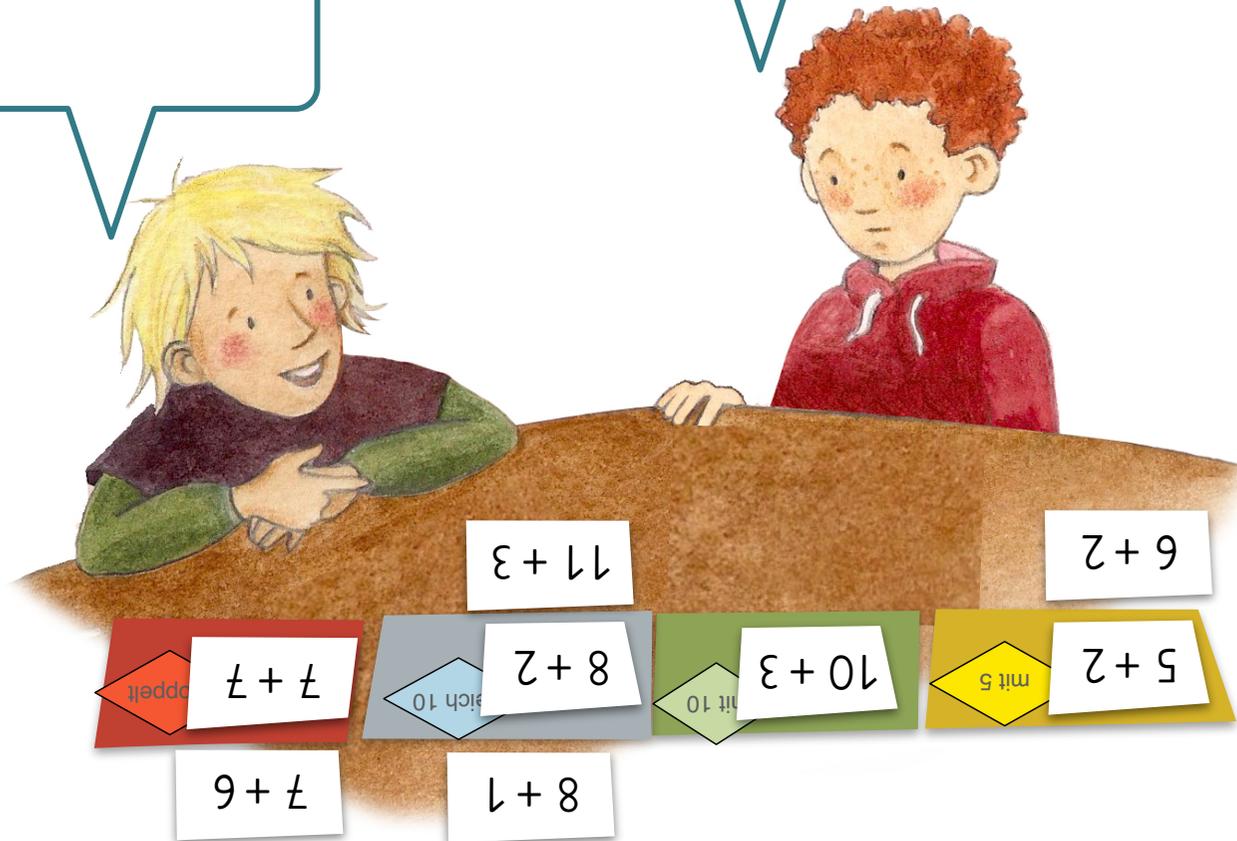
$\underline{\quad} - \underline{\quad} = \underline{\quad}$

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Basis:** Nachbaraufgaben erkunden

11 plus 3. Hier ist 1, 2, 3. Die passt unter 8+2, oder?

Schau mal. 11 plus 3 ist einer mehr als 10 plus 3. Also rechnen wir mit 10.



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

Basis: Nachbaraufgaben eigenständig finden

$$\begin{array}{l} 1 + 0 = \underline{1} \\ 1 + 1 = \underline{2} \\ 1 + 2 = \underline{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 + 1 = \underline{3} \\ 2 + 2 = \underline{4} \\ 2 + 3 = \underline{5} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 + 2 = \underline{5} \\ 3 + 3 = \underline{6} \\ 3 + 4 = \underline{7} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4 + 3 = \underline{7} \\ 4 + 4 = \underline{8} \\ 4 + 5 = \underline{9} \end{array}$$

► immer - 1

► immer + 1

Warum hilft es, ...

... bei  $4+5$  an  $4+4$  zu denken?

... bei  $4+5$  an  $5+5$  zu denken?

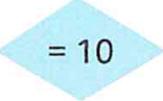
... bei  $8+3$  an  $8+2$  zu denken?

...

Weil ich ...

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**Basis:** Nachbaraufgaben eigenständig finden

Finde Nachbaraufgaben zu  = 10

$$\underline{5 + 5 = 10}$$

$$\underline{6 + 4 = 10}$$

$$\underline{9 + 1 = 10}$$

$$\underline{7 + 3 = 10}$$

$$\underline{8 + 2 = 10}$$

$$\underline{10 + 0 = 10}$$

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

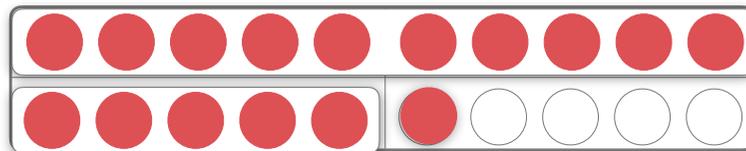
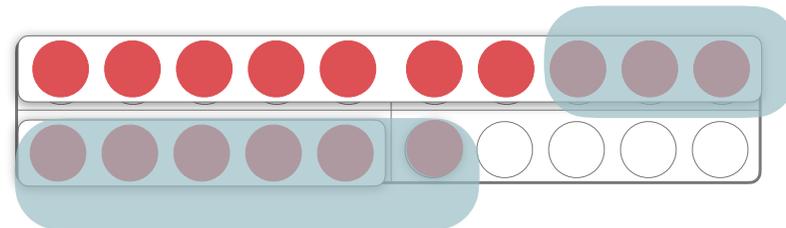
**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

1. Wie rechnest du / wie rechnet ihr? Beschreibt und erklärt.

*Rechenwege erkunden / Notationen erproben / Darstellungen finden*

16 - 9

$$\begin{array}{r} 16 - 9 = 7 \\ \hline 16 - 6 = 10 \\ 10 - 3 = 7 \end{array}$$



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege immer wieder neu erkunden

2. Wie rechnen andere Kinder? Findet verschiedene Rechenwege.

*Rechenwege vergleichen / Notationen aushandeln / Darstellungen sichern*

„Dem Rechnen feste Wege vorzuschreiben, z.B. „den **Zehnerübergang**“, ist ein mathematischer Kunstfehler.

Natürlich heißt dies nicht, dass jedes Kind möglichst viele verschiedene Wege gehen soll. Es heißt nur, dass es sich der Existenz verschiedener Wege bewusst sein und dieses Wissen für sich individuell nutzen darf“

(Nührenbörger et al. 2017, 72).

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

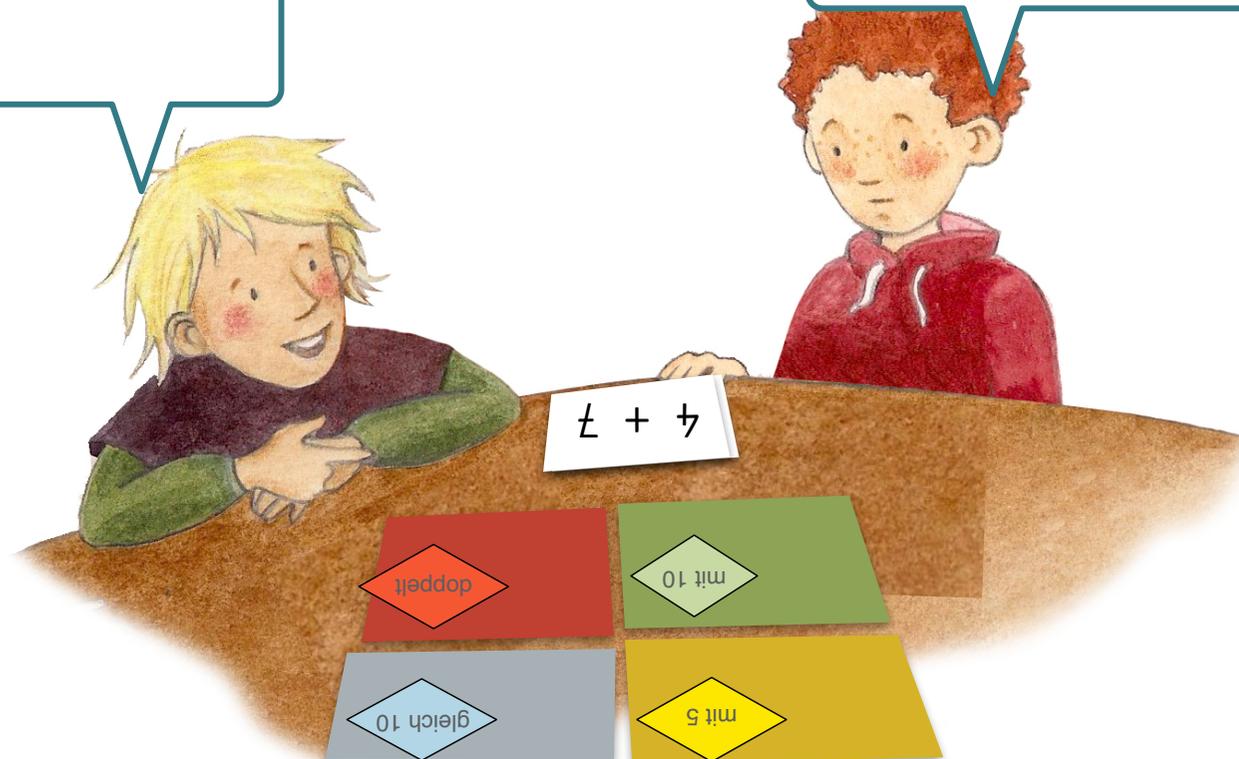
**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege immer wieder neu erkunden

2. Wie rechnen andere Kinder? Findet verschiedene Rechenwege.

*Rechenwege vergleichen / Notationen aushandeln / Darstellungen sichern*

4+7 können wir mit  
10 rechnen.

Ja, wir legen von der 1  
drei zur 7, das wären ja 10.



Quelle:

Heß, B., Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Tubach, D. (2018). 1+1 Karten bzw. 1-1 Karten. Aufgaben sortieren und ordnen, Rechenstrategien weiterentwickeln. Leipzig: Klett.

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege immer wieder neu erkunden

2. Wie rechnen andere Kinder? Findet verschiedene Rechenwege.

*Rechenwege vergleichen / Notationen aushandeln / Darstellungen sichern*

6 plus 7 könnten wir rechnen mit 6 plus 6 ist 12.



Quelle:

Heß, B., Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Tubach, D. (2018). 1+1 Karten bzw. 1-1 Karten. Aufgaben sortieren und ordnen, Rechenstrategien weiterentwickeln. Leipzig: Klett.

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

2. Wie rechnen andere Kinder? Findet verschiedene Rechenwege.

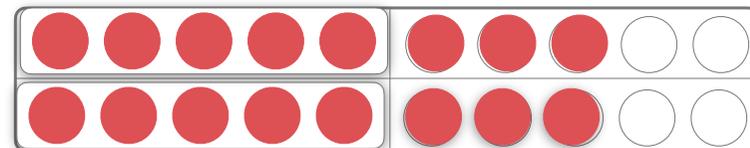
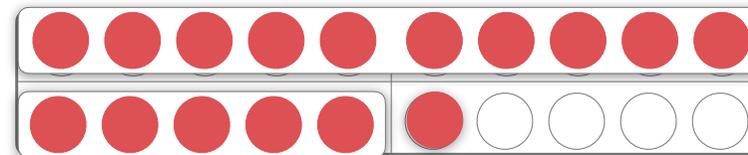
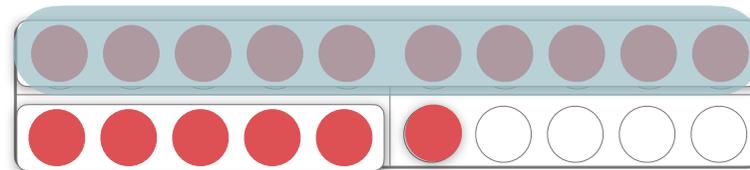
*Rechenwege vergleichen / Notationen aushandeln / Darstellungen sichern*

16 - 9

**mit Hilfsaufgabe**

$$\begin{array}{r} 16 - 9 = 7 \\ \downarrow +1 \\ 16 - 10 = 6 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \leftarrow +1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16 - 9 = 7 \\ \downarrow -1 \\ 16 - 8 = 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \leftarrow -1 \end{array}$$



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

2. Wie rechnen andere Kinder? Findet verschiedene Rechenwege.

*Rechenwege vergleichen / Notationen aushandeln / Darstellungen sichern*

16 - 9

mit **Hilfsaufgabe**

$$\begin{array}{l} 16 - 9 = 7 \\ 16 - 10 = 6 \end{array}$$

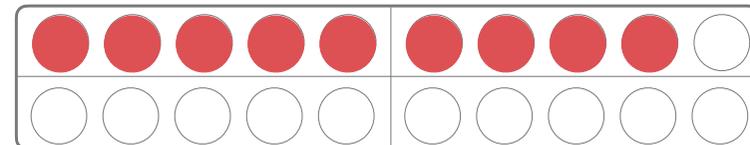
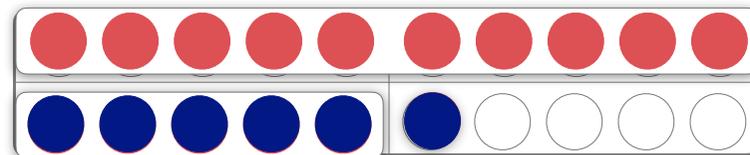
Handwritten annotations: A blue arrow labeled '+1' points from 9 to 10. A green arrow labeled '+1' points from 7 to 6.

$$\begin{array}{l} 16 - 9 = 7 \\ 16 - 8 = 8 \end{array}$$

Handwritten annotations: A red arrow labeled '-1' points from 9 to 8. A green arrow labeled '-1' points from 7 to 8.

Vielfalt an Grundvorstellungen zulassen!

„Wegnehmen“ - „Vergleichen“ (Unterschied)



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

2. Wie rechnen andere Kinder? Findet verschiedene Rechenwege.

*Rechenwege vergleichen / Notationen aushandeln / Darstellungen sichern*

16 - 9

$$\begin{array}{r} 16 - 9 = 7 \\ \hline 17 - 10 = 7 \end{array}$$

**Vereinfachen**

$$\begin{array}{r} 16 - 9 = 7 \\ 17 - 10 = 7 \end{array}$$

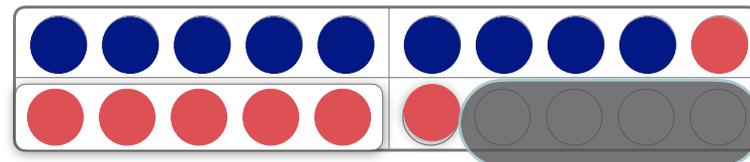
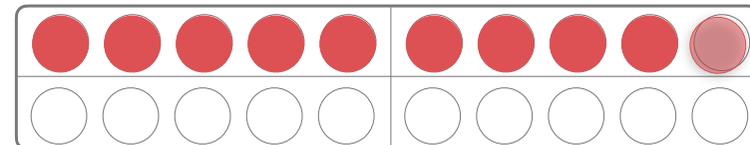
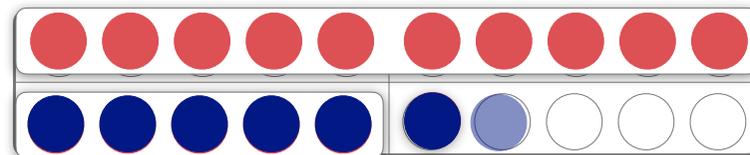
+1   +1   +0

**„Ergänzen“**

$$\begin{array}{r} 16 - 9 = 7 \\ \hline 9 + 7 = 16 \end{array}$$

Vielfalt an Grundvorstellungen zulassen!

„Wegnehmen“ - „Vergleichen“ (Unterschied)



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege immer wieder neu erkunden

3. Rechne wie ... / Rechne mit ...

*Rechenwege erproben und prüfen / Bewusstheit und Sicherheit entwickeln*

Nicht jedes Kind muss jeden Rechenweg können,

aber jedes Kind sollte ...

... verschiedene Rechenwege kennen lernen

... eigene Rechenwege beschreiben, darstellen und

... geschickt nutzen

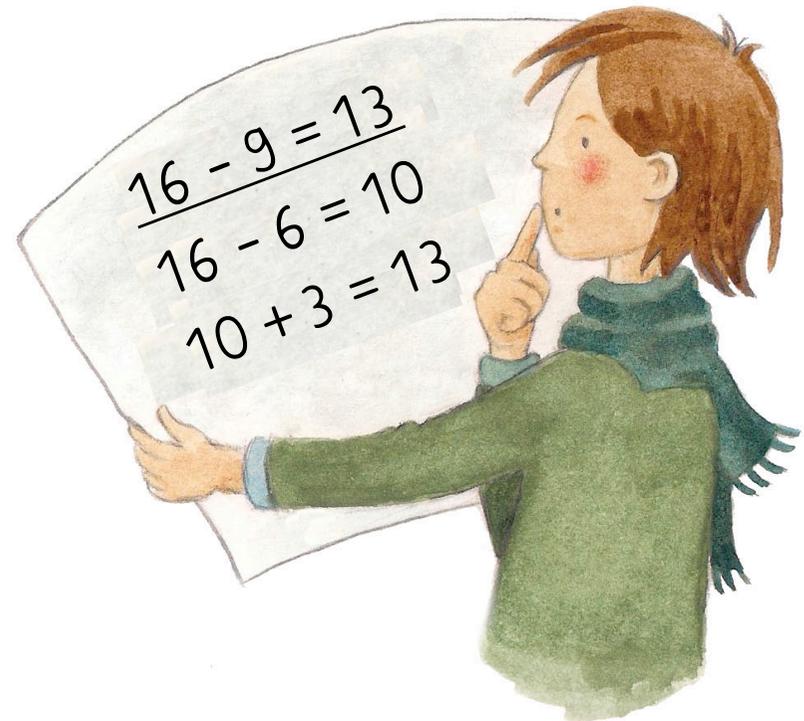
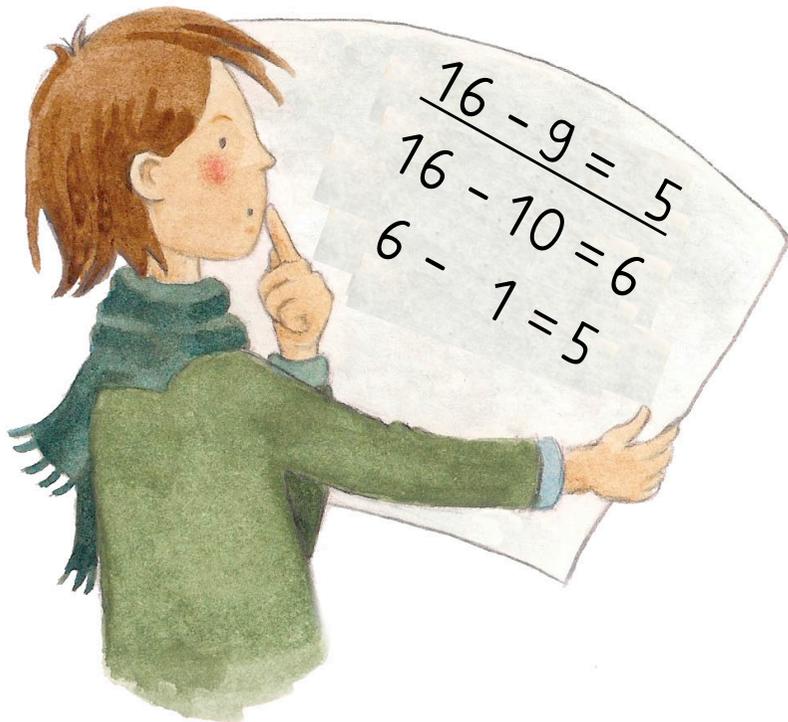
### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege immer wieder neu erkunden

3. Rechne wie ... / Rechne mit ...

*Rechenwege erproben und prüfen / Bewusstheit und Sicherheit entwickeln*

Hier ist etwas falsch.



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

3. Rechne wie ... / Rechne mit ...

*Rechenwege erproben und prüfen / Bewusstheit und Sicherheit entwickeln*



Sprachmuster und Notationsvorschriften nicht als „**Vorschriften**“ ...  
- Hindernis bei der Entwicklung von Rechenwegen  
und zwar immer dann, wenn diese wie eine Schablone / wie ein  
„kleiner Algorithmus“ genutzt werden ...

„Dort, wo dies geschieht, findet eine Normierung statt, durch die das Zahlenrechnen im erweiterten Zahlenraum, verknüpft mit der Notation von Rechenwegen, nicht nur seiner eigentlichen Intention entfremdet, sondern auch den damit verbundenen Möglichkeiten beraubt wird“

(Rathgeb-Schnierer & Rechtsteiner 2018, 32f).

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

3. Rechne wie ... / Rechne mit ...

*Rechenwege erproben und prüfen / Bewusstheit und Sicherheit entwickeln*



Sprachmuster und Notationsvorschriften als „**Vorbilder**“ ...

- Stütze des Rechenwegs und des Rechen-Lernprozess  
und zwar immer dann, wenn diese wie die bewusste  
Auseinandersetzung mit Sprech- und Darstellungsweisen unterstützen...

als Grundlage für den **Austausch** der Kinder und deren Reflexion über  
verschiedene Rechenwege

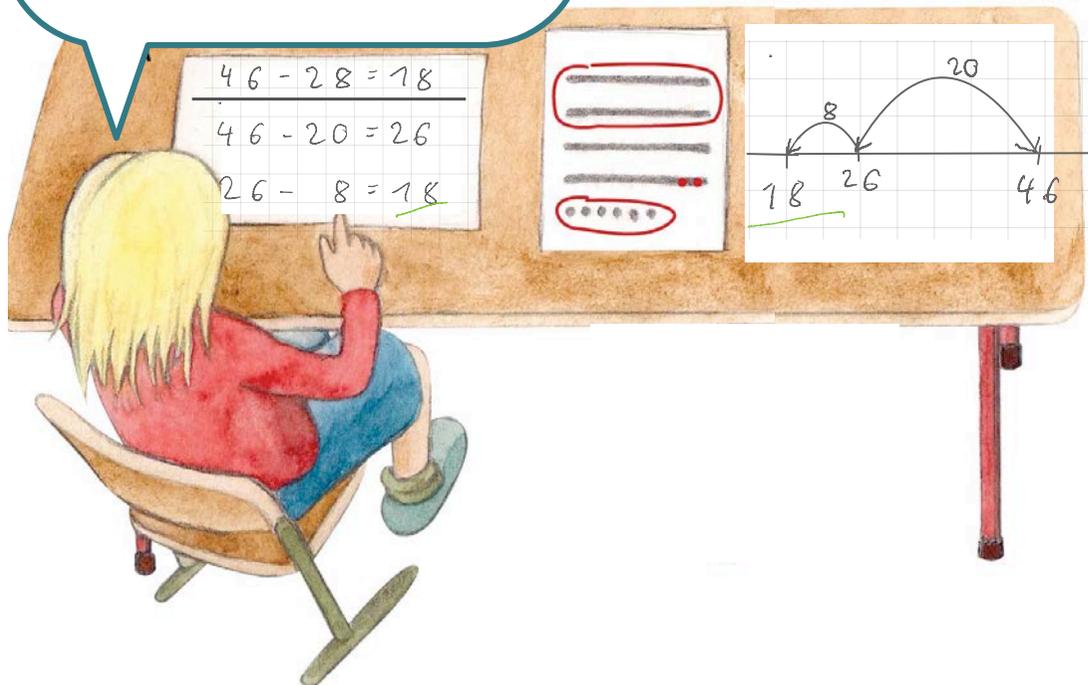
- über Unterschiede zwischen Rechenwegen,
- über verschiedene Darstellungen von Rechenwegen und
- über unterschiedliche Gründe für die Verwendung von spezifischen Rechenwegen bei unterschiedlichen Aufgabenstellungen

### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

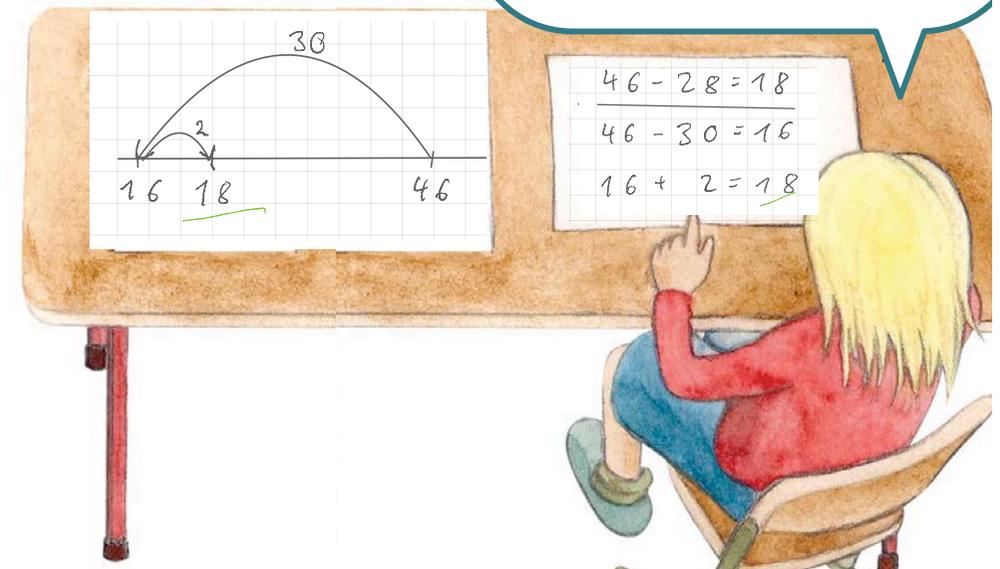
**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

*Ausblick Klasse 2: Einfache Aufgaben wieder nutzen*

Ich rechne in Schritten, erst die Zehner weg, dann die Einer.



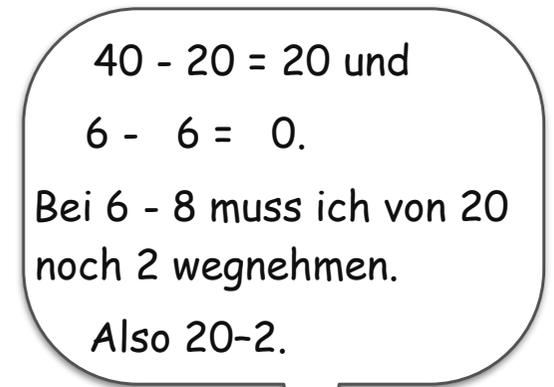
28 ist nah an 30.  
Ich rechne mit der Hilfsaufgabe.  $46 - 30$ .



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

*Ausblick Klasse 2: Einfache Aufgaben wieder nutzen*



$$\begin{array}{r} 46 - 28 = 20 - 2 = 18 \\ \hline 40 - 20 \\ 6 - 8 \end{array}$$



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

**nachhaltiges Lernen:** Rechenwege erkunden und sichern

*Ausblick Klasse 2: Einfache Aufgaben wieder nutzen*

Erst  $40 - 20$ . Es bleiben 2 Zehner und 6 Einer übrig. Von 26 ziehe ich noch 8 ab.



$$\begin{array}{r} 46 - 28 = 18 \\ \hline \end{array}$$

$$40 - 20 = 20$$

$$26 - 8 = 18$$

$$\begin{array}{r} 46 - 28 = 20 - 2 = 18 \\ \hline \end{array}$$

$$40 - 20$$

$$6 - 8$$

$$40 - 20 = 20 \text{ und}$$

$$6 - 6 = 0.$$

Bei  $6 - 8$  muss ich von 20 noch 2 wegnehmen.

Also  $20 - 2$ .



### 3. Flexibles Zahlverständnis führt zu Ableitungsstrategien

Rechenwege sind individuell und werden sehr variabel eingesetzt

#### abhängig

- von der Rechenoperation, und ihren Gesetzmäßigkeiten

- von den Zahlenwerten der Aufgabe
- |   |         |          |
|---|---------|----------|
|   | $9 + 4$ | $14 - 6$ |
|   | $8 + 5$ | $15 - 8$ |
| <i>(es gibt keine Universalstrategie)</i> | $7 + 6$ | $16 - 9$ |

- von subjektiven Einschätzungen („*leichter/ einfacher für mich*“)

„Wie habe ich es früher gemacht?“

„Wie macht es mein Nachbar?“

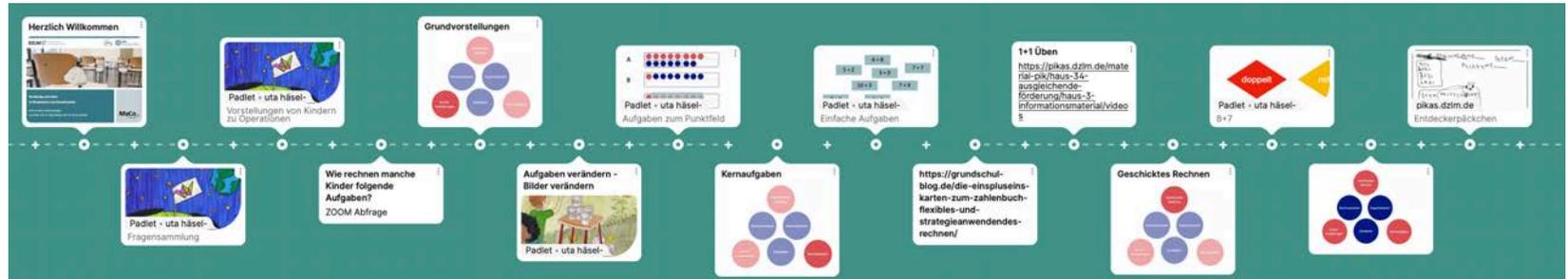
„Was sagt die Lehrerin?“

#### unerlässlich für erfolgreiches, denkendes Rechnen

Erst nach der Erkundung sollten

- „Konventionen“ der Darstellung vereinbart werden
- Strategien für die flexible Nutzung erörtert werden

Padlet: <https://padlet.com/haeselweide/vhww422n5ru30ea7>



1 Fachliche Hintergründe und gemeinsame Erkundungen

2 Grundvorstellungen

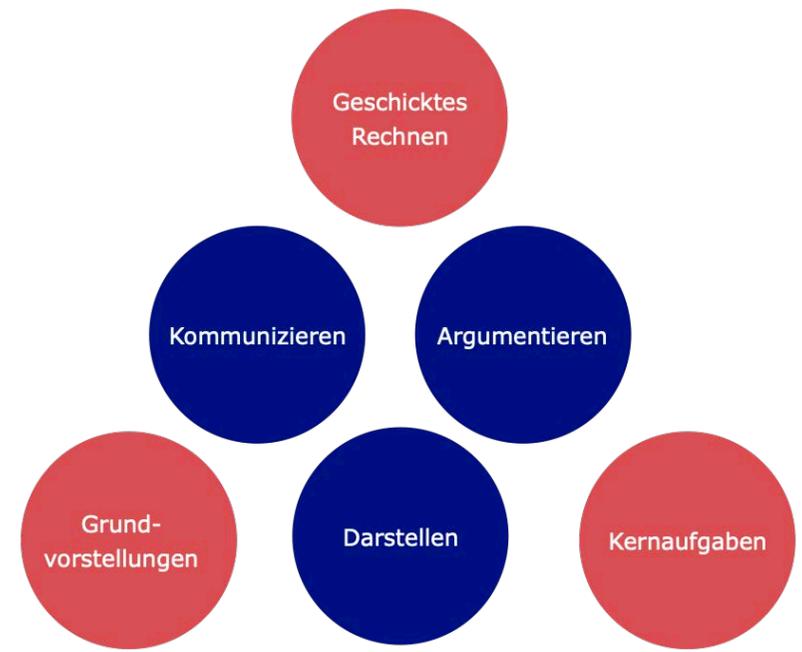
3 Kernaufgaben

4 Geschickt rechnen

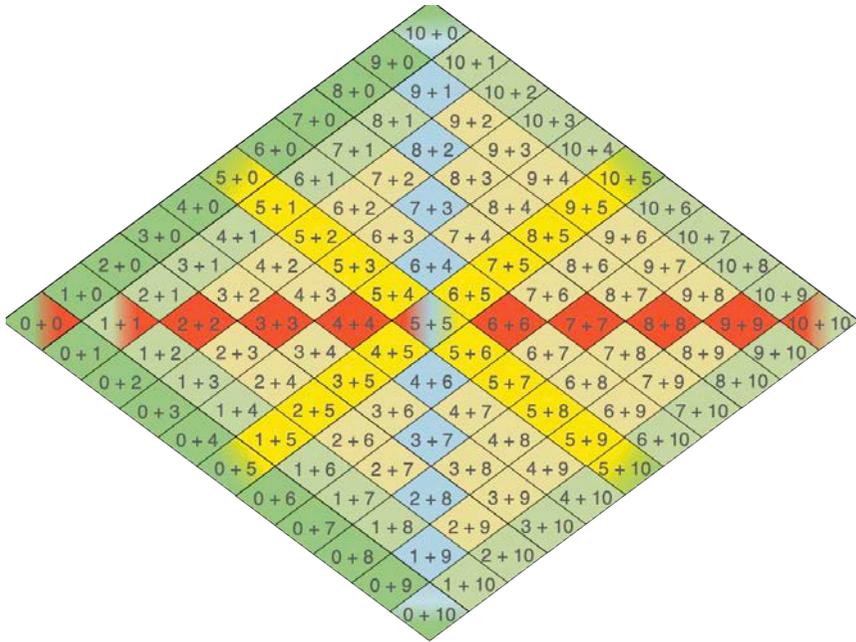
5 Produktives Üben

Erkunden und Entdecken

Vertiefen und Systematisieren



# 4. Produktives Üben: Verständnis und Sicherheit ausbauen



Finde Plusaufgaben. Das Ergebnis ist...

kleiner als 10.

größer als 10.

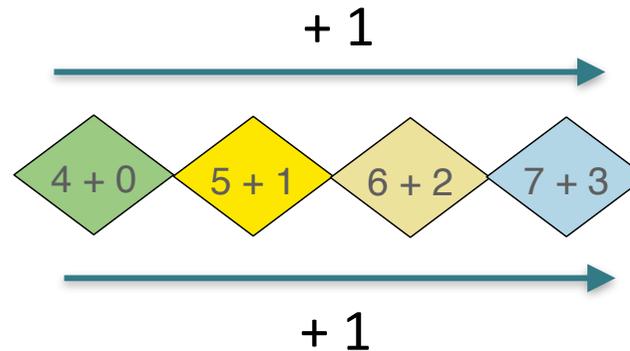
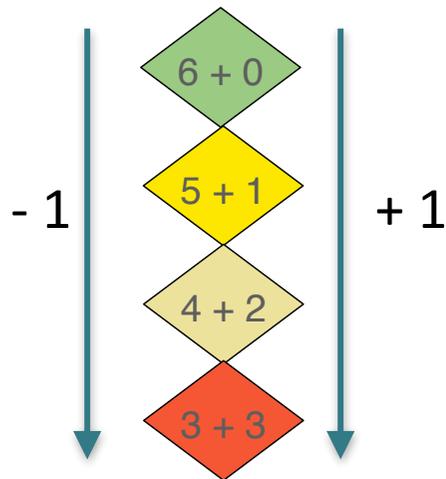
$$2 + 3$$

$$2 + 9$$

$$6 + 2$$

$$6 + 5$$

Wege auf der Einspluseins-Tafel.



## 4. Produktives Üben: Verständnis und Sicherheit ausbauen

### Prozessorientierung

#### Kommunizieren

*Die Ergebnisse verändern sich nach einem Muster, das hinterfragt werden kann und diskussionswürdig ist.*

Was fällt auf?

Beschreibe.

Die 1. Zahl wird immer 2 größer, die 2. Zahl wird 1 größer und das Ergebnis wird 1 größer.

Ein schönes Päckchen

Erkunden	12	-	4	=	<u>8</u>
	14	-	5	=	<u>9</u>
	16	-	6	=	<u>10</u>
	18	-	7	=	<u>11</u>
	20	-	8	=	<u>12</u>
	+ 2		+ 1		+ 1



## 4. Produktives Üben: Verständnis und Sicherheit ausbauen

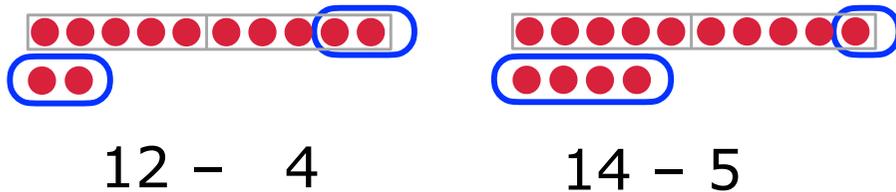
### Prozessorientierung

*Kommunizieren - Darstellen - Argumentieren*

Was fällt auf?      Warum?

*Beschreibe. - Zeige. - Erkläre.*

Mit Legematerial:



Ich nehme einen weniger weg als ich hinzulege. Also vergrößert sich der Rest um 1.

Ein schönes Päckchen

Erkunden	12 - 4 = 8
	14 - 5 = 9
	16 - 6 = 10
	18 - 7 = 11
	20 - 8 = 12
	+ 2      + 1      + 1

## 4. Produktives Üben: Verständnis und Sicherheit ausbauen

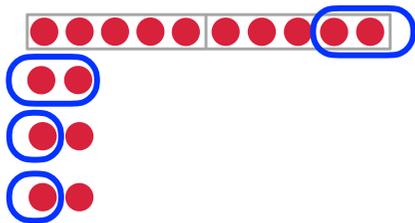
### Prozessorientierung

*Kommunizieren - Darstellen - Argumentieren*

Was fällt auf? **Warum?**

*Beschreibe. - Zeige. - Erkläre.*

Mit Legematerial:



Veränderung:

Aus

$$12 - 4$$

mache

$$14 - 5.$$

Ich nehme einen weniger weg als ich hinzulege. Also vergrößert sich der Rest um 1.

Ein schönes Päckchen

Erkunden	12 - 4 = <u>8</u>		
	14 - 5 = <u>9</u>		
	16 - 6 = <u>10</u>		
	18 - 7 = <u>11</u>		
	20 - 8 = <u>12</u>		
	+ 2	+ 1	+ 1

## 4. Produktives Üben: Verständnis und Sicherheit ausbauen

### Prozessorientierung

#### Hans Freudenthal

niederländischer  
Mathematikdidaktiker,  
1905-1990

Mathematik ist keine Menge von Wissen.

Mathematik ist eine **Tätigkeit**, eine  
**Verhaltensweise**, eine **Geistesverfassung**.

Immer gilt: Der Schüler erwirbt  
Mathematik als Geistesverfassung nur über  
Vertrauen auf seine eigenen Erfahrungen  
und seinen eigenen Verstand. ...

Eine Geisteshaltung lernt man aber nicht,  
indem einer einem schnell erzählt, wie er  
sich zu benehmen hat.

Ein schönes Päckchen

Erkunden

12	-	4	=	<u>8</u>
14	-	5	=	<u>9</u>
16	-	6	=	<u>10</u>
18	-	7	=	<u>11</u>
20	-	8	=	<u>12</u>

+ 2    + 1    + 1

## 4. Produktives Üben: Verständnis und Sicherheit ausbauen

### Prozessorientierung

#### Hans Freudenthal

niederländischer  
Mathematikdidaktiker,  
1905-1990

Man lernt sie im **Tätigsein**,  
indem man Probleme löst,  
*allein* oder in seiner *Gruppe* –  
**Probleme, in denen Mathematik steckt.**

Mathematische Tätigkeiten sind z.B.  
entdecken - ordnen - systematisieren

... gebündelt in unterschiedlichen  
prozessbezogene Kompetenzen

Ein schönes Päckchen

12	-	4	=	<u>8</u>
14	-	5	=	<u>9</u>
16	-	6	=	<u>10</u>
18	-	7	=	<u>11</u>
20	-	8	=	<u>12</u>

+ 2   + 1   + 1

# Fazit

für alle Kinder essentiell sind tragfähige Rechenwege  
jedes Kind entwickelt individuelle Rechenwege

Nachbaraufgaben erkunden  
Rechenwege

Geschicktes  
Rechnen

Kommunizieren

Argumentieren

vielfältige Vernetzungen von Material-Bild-Term-Sprache

Grund-  
vorstellungen

Darstellen

Kernaufgaben

Bewusstheit  
über die  
Operation entwickeln

Erkunden  
und Sichern von  
einfachen Aufgaben

## Literatur

Bönig, D., Hering, J., London, M., Nührenbörger, M. & Thöne, B. (2017). Erzähl mal Mathe. Seelze: Kallmeyer.

Freudenthal, H. (1981). Kinder und Mathematik. Grundschule (4), 100-102.

Freudenthal, H. (1982). Mathematik – eine Geisteshaltung. Grundschule (4), 140-142.

Gaidoschik, M. (2010). Wie Kinder rechnen lernen - oder auch nicht. Eine empirische Studie zur Entwicklung von Rechenstrategien im ersten Schuljahr. Frankfurt am Main: Lang.

Gaidoschik, M., Moser Opitz, E., Nührenbörger, M., & Rathgeb-Schnierer, E. (2021). Besondere Schwierigkeiten beim Mathematiklernen. Special Issue der Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, 47(111S).  
Verfügbar unter: <https://ojs.didaktik-der-mathematik.de/index.php/mgdm/issue/view/46>.

Götze, D., Selter, Ch. & Zannetin, E. (2019). Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Hannover: Klett Kallmeyer.

Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2013). Ablösung vom zählenden Rechnen. Fördereinheiten für heterogene Lerngruppen. Seelze: Kallmeyer.

Häsel-Weide, U. & Nührenbörger, M. (2017). Förderkommentar Lernen zum Zahlenbuch 1. Leipzig: Klett.

Hengartner, E. (1999). Mit Kindern lernen: Standorte und Denkwege im Mathematikunterricht. Klett und Balmer

Heß, B., Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Tubach, D. (2018). 1-1 Karten. Aufgaben sortieren und ordnen, Rechenstrategien weiterentwickeln. Leipzig: Klett.

Heß, B., Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Tubach, D. (2018). 1+1 Karten. Aufgaben sortieren und ordnen, Rechenstrategien weiterentwickeln. Leipzig: Klett.

Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R. & Tubach, D. (2016). Mit Zahlen spielen. Leipzig: Klett.

Padberg, F., Benz, C. (2021). Didaktik der Arithmetik. 5. Aufl., Heidelberg: Springer Spektrum.

## Literatur

Rathgeb-Schnierer, E. & Rechtsteiner, Ch. (2018). Rechnen lernen und Flexibilität entwickeln. Heidelberg: Springer Spectrum

Radatz, H. (1991). Einige Beobachtungen bei rechenschwachen Grundschulern. In J.H. Lorenz (Hrsg.), Störungen beim Mathematiklernen (74-89). Köln: Aulis.

Selter, C. (2000). Vorgehensweisen von Grundschüler(inne)n bei Aufgaben zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 1000. Journal für Mathematik-Didaktik, 21(3/4), 227–258.

Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (Hrsg.) (2014). Mathe sicher können. Natürliche Zahlen (Förderbausteine / Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen). Berlin: Cornelsen

Selter, Ch., Walter, D., Heinze, A., Brandt, J. & Jentsch, A. (2019). Mathematische Kompetenzen im internationalen Vergleich: Testkonzeption und Ergebnisse. In K. Schwippert, D. Kasper, O. Köller, N. McElvany, Ch. Selter, M. Steffensky & H. Wendt (Hrsg.), TIMSS 2019 Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich (57-114). Münster: Waxmann.

Söbbeke, E. & Fetzer, M. (2017). Operationen verstehen und anwenden mit Hilfe von Materialien. In U. Häsel-Weide & M. Nührenbörger (Hrsg.), Gemeinsam Mathematik lernen – mit allen Kindern rechnen. Frankfurt: Grundschulverband.

Winter, H. (1984). Begriff und Bedeutung des Uebens im Mathematikunterricht. Mathematik lehren (2), 4–16

Wittmann, Ch, Müller, G., Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D. & Heß, B. (2017). Das Zahlenbuch 1. Lehrerband, Schülerbuch und Arbeitsheft. Leipzig: Klett.

Zannetin, E. & Selter, Ch. (2018). Mathematik unterrichten in der Grundschule. Seelze: Klett Kallmeyer.

## Internet-Links

Grundschulblog: <https://grundschul-blog.de>

Mathe-sicher-koennen: <https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de>

mathe inklusiv mit PIKAS: <https://pikas-mi.dzlm.de>

PIKAS: <https://pikas.dzlm.de>

## Praxis-Material

1+1 und 1-1 Karten zum Sortieren, Ordnen und Rechnen  
Aufgaben aus dem Schulbuch: Das Zahlenbuch und aus dem zugehörigen Förderheft sowie den Igelheften  
Wendeplättchen, Fünfer- und Zehnerstreifen, 10er- und 20er-Felder