DZLM Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik

Leibniz Gemeinschaft

IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik

Bildquelle: unsplash.com
marco fileccia @fileccia

Titel

Diagnose und Förderung des Verstehens von Brüchen

Lena Wessel und Kim Rösike

MaCo

Technisches zu unserem Online-Seminar heute

So geht passive Beteiligung:

- Heute im Livestream (ohne Zoom): https://dzlm.de/livestream
- Aufzeichnung der Veranstaltung später auf dzlm.de
- in einigen Monaten: weitergehende Angebote

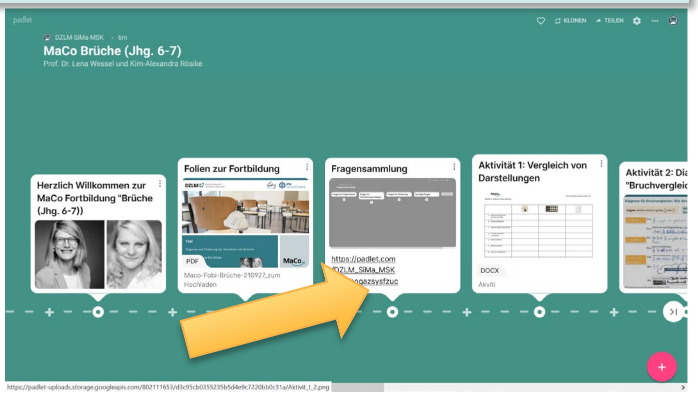
Seminar-Padlet für 27.9.21

https://padlet.com/DZLM_SiMa_MSK/44o264p7b9bvibv0

So geht aktive Beteiligung heute:

Für alle (auch Livestream-Nutzende) auf dem Padlet:

- Denkaufträge
- Moderierte Fragensammlung, werden wir ausgewählt einbringen



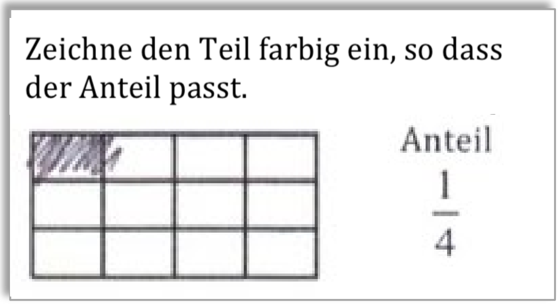
Für Zoom-Nutzende zusätzlich:

- Zoom-Chat für informellen Austausch unter Teilnehmenden (überblicken Referentinnen nur teilweise)
- Breakout-Rooms für die Diskussion in Kleingruppen
- zu ausgewählten Momenten mit Hand-Heben-Funktion von Zoom, Moderator wird ggf. Ihr Audio und Video freischalten (bitte hinterher wieder ausschalten)

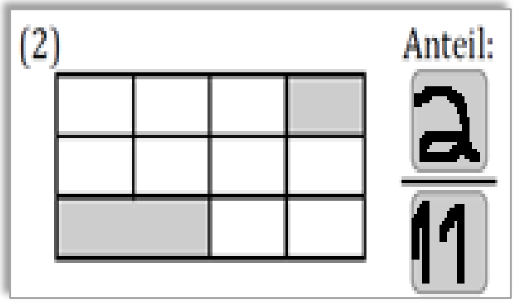
Gliederung

1. Anteil als Teil eines Ganzen – Diagnose und Förderung durch Operatives Prinzip und Kommunikation
2. Durchgängigkeit von Darstellungsmitteln – die Streifentafel
3. Gleichwertigkeit von Brüchen Diagnose und Förderung durch Darstellungsvernetzung und Kommunikation
4. Anteile von Mengen – Diagnose und Förderung von Handeln und Verinnerlichen
5. Überblick über das Fördermaterial

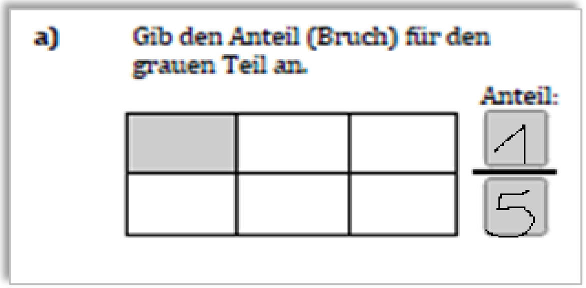
Diagnose: Typische Fehlvorstellungen zum Anteil als Teil eines Ganzen



Aaron



Sina

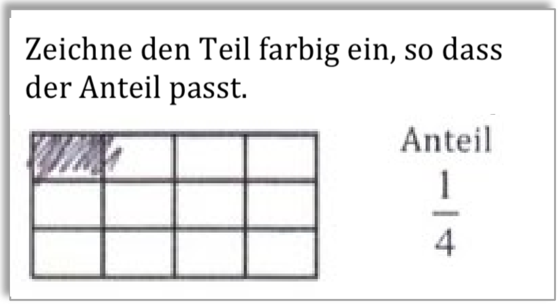


Moritz

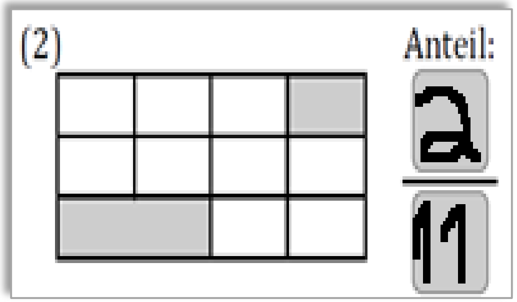
Murmelphase:

Welche Schwierigkeiten mit Brüchen sehen Sie bei den Lernenden in den Fallbeispielen?

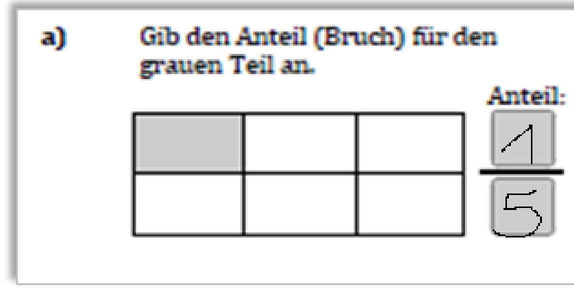
Diagnose: Typische Fehlvorstellungen zum Anteil als Teil eines Ganzen



Aaron strukturiert das Ganze nicht richtig



Sina zählt nur die Felder, berücksichtigt jedoch nicht, wie groß sie sind



Moritz schreibt den Bruch als äußeres Verhältnis:
1 zu 5 statt 1 von 6

Elementarste Grundvorstellung vom Bruch: Anteil als Teil eines Ganzen

- wird in jedem Schulbuch angeboten
- aber oft wird nicht genau genug darüber gesprochen
- dabei entwickeln viele Lernende Fehlvorstellungen, die in vielen Studien dokumentiert wurden (Hasemann 1986, Padberg & Wartha 2017)
- Problem: oft nur unzusammenhängende und nicht fehlersensitive Aufgaben, dagegen bietet Mathe sicher können zusätzliche Potentiale

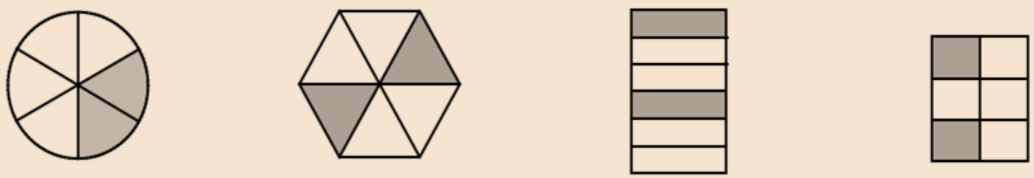
Förderung zum Bruch als Teil eines Ganzen

Kurze Murmelrunde zur Aufgabenanalyse:

- Inwiefern ist diese Aufgabe wie in jedem Schulbuch?
- Was ist daran etwas anders?

2.4 Anteile ablesen II

a) Lies die Anteile ab. Was stellst du fest?



b) Was ist an $\frac{3}{4}$ immer gleich, auch wenn das Bild dazu anders aussehen kann? Beschreibe die Bilder.

c) Finde selbst drei verschiedene Bilder zum Anteil $\frac{5}{6}$.

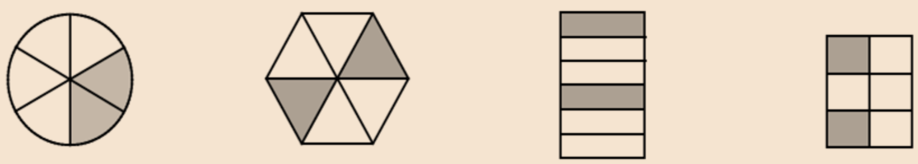
Förderung zum Bruch als Teil eines Ganzen

Kurze Murmelrunde zur Aufgabenanalyse:

- Inwiefern ist diese Aufgabe wie in jedem Schulbuch?
- Was ist daran etwas anders?

2.4 Anteile ablesen II

a) Lies die Anteile ab. Was stellst du fest?



b) Was ist an $\frac{3}{4}$ immer gleich, auch wenn das Bild dazu anders aussehen kann? Beschreibe die Bilder.

c) Finde selbst drei verschiedene Bilder zum Anteil $\frac{5}{6}$.

Typisch:

- Vernetzung von graphischer und symbolischer Darstellung

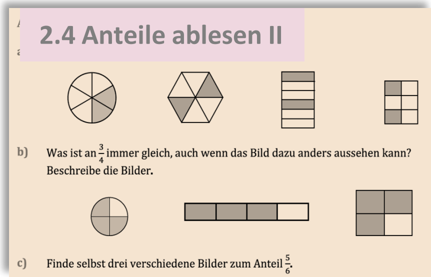
Zusätzliche Potentiale durch Operatives Prinzip

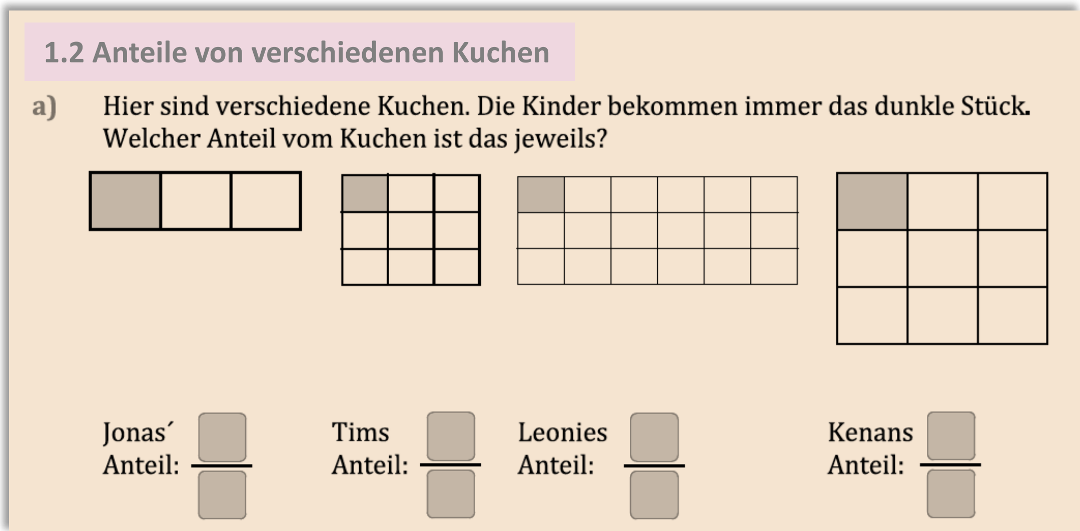
- immer zwei Sechstel, aber sie können sehr unterschiedlich aussehen
- immer drei Viertel, aber sie können unterschiedlich aussehen

Förderung zum Bruch als Teil eines Ganzen

Kurze Murmelrunde zur Aufgabenanalyse:

- Inwiefern ist diese Aufgabe wie in jedem Schulbuch?
- Was ist daran etwas anders?





Typisch:

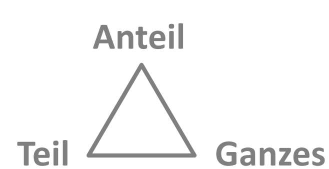
- Vernetzung von graphischer und symbolischer Darstellung

Zusätzliche Potentiale durch Operatives Prinzip

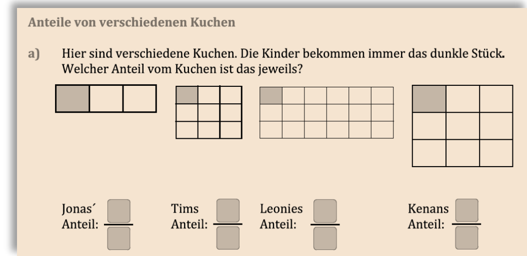
- immer zwei Sechstel, aber sie können sehr unterschiedlich aussehen
- immer drei Viertel, aber sie können unterschiedlich aussehen

- Gleicher Teil, größeres Ganze, dann ist auch der Anteil kleiner (Bilder 1-4 und 2-3)
- Gleicher Anteil, größeres Ganze, dann ist auch der Teil kleiner (Bilder 2-4)

→ Lernende sollen Intuition entwickeln für Brüche und ihre Zusammenhänge



Förderung zum Bruch als Teil eines Ganzen


Anteile von verschiedenen Kuchen

a) Hier sind verschiedene Kuchen. Die Kinder bekommen immer das dunkle Stück. Welcher Anteil vom Kuchen ist das jeweils?

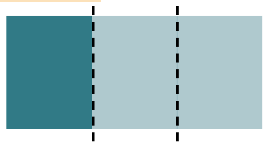
Jonas´ Anteil: Tims Anteil: Leonies Anteil: Kenans Anteil:

Sprache als zusätzliches Darstellungsmittel

Symbole

$\frac{1}{3}$

Bilder



Sprache

Das Ganze in 3 Stücke zerlegen

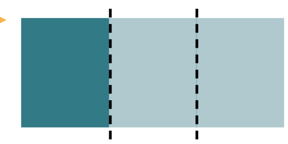
Der Teil ist 1 Stück groß

Der Anteil ist 1 von 3 Stücken, also 1/3

Symbole

$\frac{1}{3}$

Bilder

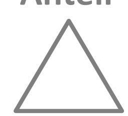


Alltags-Kontext

Smarties Verteilen

- Verknüpfung von Teil, Ganzen und resultierendem Anteil
- Es geht um die **Beziehung von Ganzem und Teil**
  - Den **Anteil**, den 1 an der 3 hat.

Anteil



Teil Ganzes

Aktivität zum tieferen Eindenken

Umfrage

42 von 323 Befragten geben an....

45 von 67 Mädchen und
11 von 23 Jungen...

Typische Anforderung im Alltag:

- Woher weiß man, wie groß ungefähr 42/243 sind?
- Welcher Anteil ist größer, 45 / 67 oder 11 / 23?

1. Bearbeiten Sie diese Anforderung (für mittelstarke Klassen 7)

2. Analysieren Sie kurz:

- Was muss man fachlich können,
  um diese Schätzanforderungen zu bewältigen?
- Mit welcher Darstellung kann man über diese Anteile gut nachdenken?

Brüche schätzen – eine vernachlässigte Kompetenz

Anforderung des Alltags:

- Woher weiß man, wie groß ungefähr 42/243 sind?
- Welcher Anteil ist größer, 45 / 67 oder 11 / 23?

42/243 ist ungefähr 40/240, also 1/6
45/67 ist ungefähr 2/3,
11/23 ist unter 1/2, also 45 / 67 > 11 / 23

- Was muss man fachlich können,
  um die Schätzaufgaben zu lösen?

- Runden auf glatte Zahlbeziehungen
- „Nahe glatte Zahlbeziehungen" sehen
- gleichwertigen einfachen Bruch finden

- Mit welcher Darstellung kann man
  über diese Anteile gut nachdenken?

Brüche schätzen – eine vernachlässigte Kompetenz

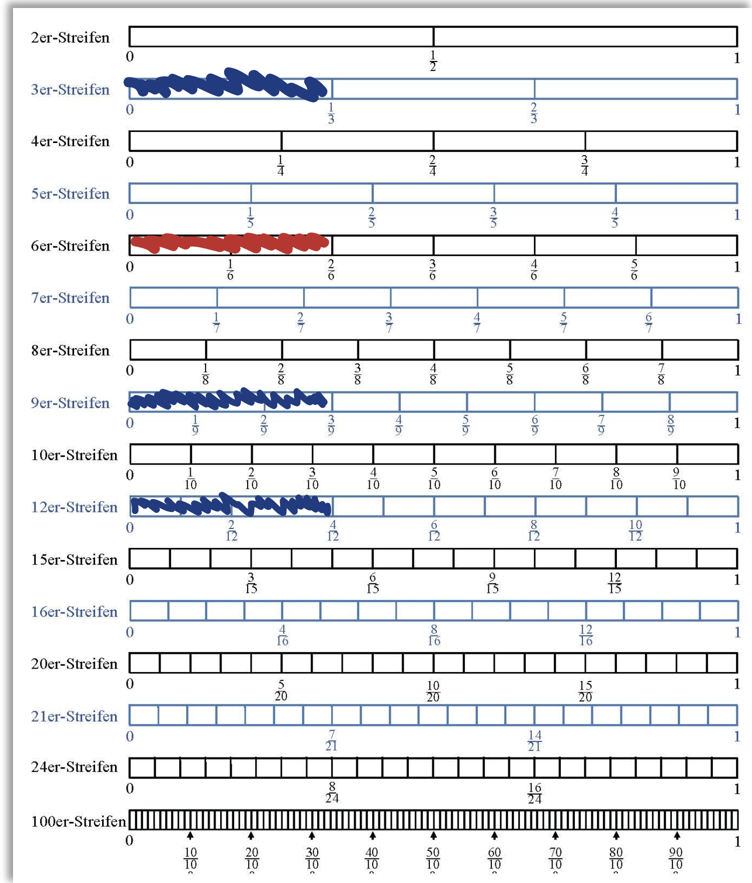
Anforderung des Alltags:
- Woher weiß man, wie groß ungefähr 42/243 sind?
- Welcher Anteil ist größer, 45 / 67 oder 11 / 23?

42/243 ist ungefähr 40/240, also 1/6
45/67 ist ungefähr 2/3,
11/23 ist unter 1/2, also 45 / 67 > 11 / 23

- Was muss man fachlich können,
  um die Schätzaufgaben zu lösen?

- Runden auf glatte Zahlbeziehungen
- „Nahe glatte Zahlbeziehungen“ sehen
- gleichwertigen einfachen Bruch finden

Streifentafel als Denkmittel
und Sprachentlastung



Murmelphase

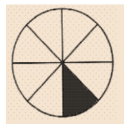
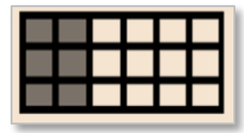
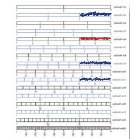
1. **Ihre Lieblingsdarstellung:**
   Welche Darstellung nutzen Sie bei Brüchen am liebsten?
   Warum gerade diese?
   Wozu genau nutzen Sie diese Darstellung?

Gliederung

1. Anteil als Teil eines Ganzen – Diagnose und Förderung durch Operatives Prinzip und Kommunikation
2. Durchgängigkeit von Darstellungsmitteln – die Streifentafel
3. Gleichwertigkeit von Brüchen Diagnose und Förderung durch Darstellungsvernetzung und Kommunikation
4. Anteile von Mengen – Diagnose und Föderung von Handeln und Verinnerlichen
5. Überblick über das Fördermaterial

Durchgängigkeit der Streifentafel

Aktivität 1: Vergleich der Darstellungen:
Vergleichen Sie die Streifentafel und Ihre „Lieblingsdarstellung“:
Welche Tätigkeiten gehen in welcher Darstellung besonders gut?

			
a. Brüche als Teile eines Ganzen darstellen	✓ Dominantes 1. Bild	✓	✓ Für Einstieg unübersichtlich, auf Dauer mehr Zusammenhänge zwischen Brüchen
b. Brüche vergleichen	Nur eingeschränkt auf einfache Zahlen	Nur eingeschränkt auf einfache Zahlen	✓ Für Einstieg unübersichtlich, auf Dauer mehr Zusammenhänge zwischen Brüchen
c. Gleichwertige Brüche finden	✓	✓	✓ Nutzt sichtbare Zusammenhänge, hilft beim Verinnerlichen
d. Prozente in Brüche umwandeln	Nein	Nur eingeschränkt auf einfache Zahlen	✓ Nutzt sichtbare Zusammenhänge, hilft beim Verinnerlichen
e. Brüche addieren	Nur eingeschränkt auf einfache Zahlen	✓	✓ Nutzt sichtbare Zusammenhänge, hilft beim Verinnerlichen
f. Brüche schätzen	Nein, zu wenig Zusammenhänge zwischen Brüchen	Zu wenig Zusammenhänge zwischen Brüchen	✓ Nutzt sichtbare Zusammenhänge
Brüche multiplizieren	Nein	✓	Nein

Prinzip der Durchgängigkeit der Darstellungen:

Gerade schwächere Lernende sollten **möglichst wenige** Darstellungen **möglichst durchgängig** nutzen
da jede neue Darstellung wieder Eindenken erfordert
nur dann werden sie zum echten Arbeitsmittel

Brüche schätzen – eine vernachlässigte Kompetenz

Streifentafel als Denkmittel
und Sprachentlastung

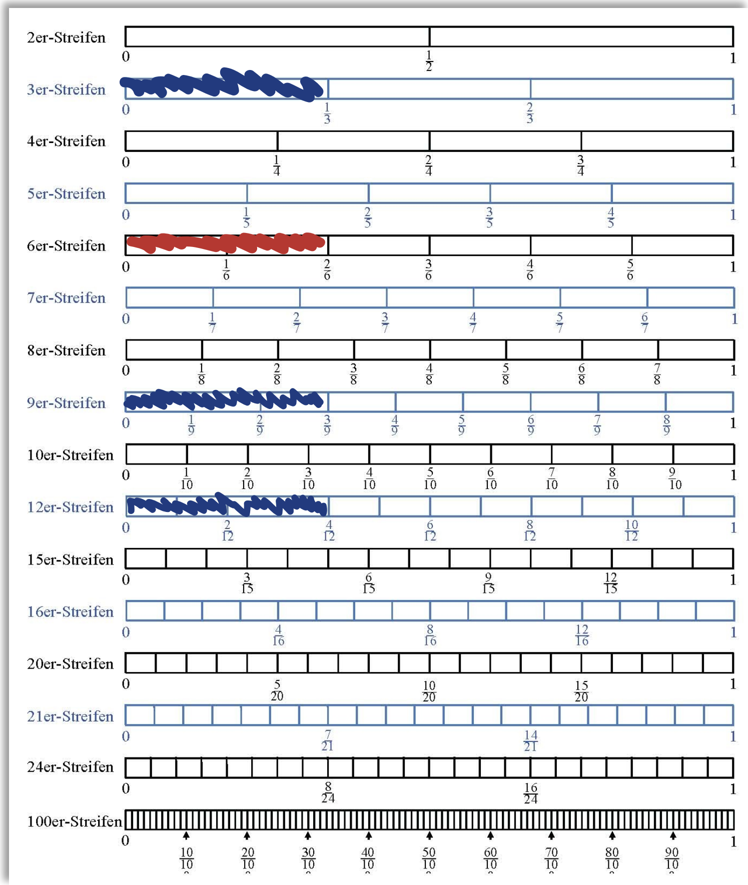
Anforderung des Alltags:

- Woher weiß man, wie groß ungefähr 42/243 sind?
- Welcher Anteil ist größer, 45 / 67 oder 11 / 23?

42/243 ist ungefähr 40/240, also 1/6
45/67 ist ungefähr 2/3,
11/23 ist unter 1/2, also 45 / 67 > 11 / 23

- Was muss man fachlich können,
  um die Schätzaufgaben zu lösen?

- Runden auf glatte Zahlbeziehungen
- „Nahe glatte Zahlbeziehungen“ sehen
- gleichwertigen einfachen Bruch finden
- am einfachsten zu denken an Streifentafel
- am einfachsten zu erläutern an Streifentafel



Gliederung

1. **Anteil als Teil eines Ganzen – Diagnose und Förderung durch Operatives Prinzip und Kommunikation**
2. **Durchgängigkeit von Darstellungsmitteln – die Streifentafel**
3. **Gleichwertigkeit von Brüchen Diagnose und Förderung durch Darstellungsvernetzung und Kommunikation**
4. **Anteile von Mengen – Diagnose und Förderung von Handeln und Verinnerlichen**
5. **Überblick über das Fördermaterial**

Diagnose für Bruchvergleiche: Wie denken Kinder?

Aufgabe: Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$?

Welche Antworten würden Sie erwarten?

Was zeigen die Antworten über das Denken der Kinder?

$\frac{3}{4}$ ist größer

Gina: $\frac{3}{4}$, weil es größere Felder sind.

Finn: Antwort und Begründung: weil $\frac{3}{4}$ nur noch ein stück fehlt bei $\frac{9}{12}$ fehlen 3 stücke

$\frac{9}{12}$ ist größer

Elif: Der Bruch $\frac{9}{12}$ ist größer den 9 und 12 sin größer als 3 und 4.

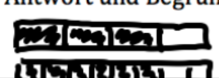
Dora: Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ ist ~~[illegible]~~ größer weil, es mehr Felder hat.

$\frac{9}{12}$ und $\frac{3}{4}$ sind gleich groß

Can: Antwort und Begründung: Beide sind gleich, weil $\frac{3}{4}$ die Kürzung von $\frac{9}{12}$ ist.

Bea: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Alia: Antwort und Begründung: Beide sind gleich groß.



Es wurde mit 3 vergröbert.

Welche Antworten würden Sie erwarten?

Was zeigen die Antworten über das Denken der Kinder?

Welche Beziehung zwischen Anteil, Teil und Ganzem haben sie genutzt?

Welche haben Sie aber noch nicht verstanden?

(MSK Standortbestimmung B2B, Aufgabe 1b, Schink et al. 2014)

Diagnose für Bruchvergleiche: Wie denken Kinder?

Aufgabe: Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$?

Welche Antworten würden Sie erwarten?
Was zeigen die Antworten über das Denken der Kinder?

$\frac{3}{4}$ ist größer	Gina	$\frac{3}{4}$, weil es größere Felder sind.	Größe der Felder (je weniger, desto größer)
	Finn	Antwort und Begründung: weil $\frac{3}{4}$ nur noch ein stück fehlt bei $\frac{9}{12}$ fehlen 3 stücke	Differenz der Stückanzahl zum Ganzen
$\frac{9}{12}$ ist größer	Elif	Der Bruch $\frac{9}{12}$ ist größer den 9 und 12 sin größer als 3 und 4.	Größe der Felder (je mehr, desto größer)
	Dora	Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ ist größer weil, es mehr Felder hat.	Anzahl der Felder (je mehr, desto größer)

Achtung, alle diese Kinder konnten die richtigen Bilder der beiden Brüche zeichnen, das bedeutet aber nicht, dass man die relevante Teil-Ganzes-Beziehung in den Bildern auch erfasst hat!!

→ erst der Aufbau von Operationsverständnis (zum Vergleichen) sichert auch Zahlverständnis für den Anteil als Teil eines Ganzen

(MSK Standortbestimmung B2B, Aufgabe 1b, Schink et al. 2014)

Schriftliche Diagnose in Mathe sicher können (B2 B): Wie denken Kinder?

Aufgabe: Welcher Anteil ist größer, $\frac{9}{12}$ oder $\frac{3}{4}$?

Welche Antworten würden Sie erwarten?

Was zeigen die Antworten über das Denken der Kinder?

$\frac{3}{4}$ ist größer

Gina: $\frac{3}{4}$, weil es größere Felder sind.

Größe der Felder (je weniger, desto größer)

Finn: Antwort und Begründung: weil $\frac{3}{4}$ nur noch ein stück fehlt bei $\frac{9}{12}$ fehlen 3 stücke

Differenz der Stückanzahl zum Ganzen

$\frac{9}{12}$ ist größer

Elif: Der Bruch $\frac{9}{12}$ ist größer den 9 und 12 sin größer als 3 und 4.

Größe der Felder (je mehr, desto größer)

Dora: Antwort und Begründung: $\frac{9}{12}$ ist größer weil, es mehr Felder hat.

Anzahl der Felder (je mehr, desto größer)

$\frac{9}{12}$ und $\frac{3}{4}$ sind gleich groß

Can: Antwort und Begründung: Beide sind geeich, weil $\frac{3}{4}$ die Kürzung von $\frac{9}{12}$ ist.

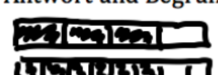
Rein rechnerische Begründung (zeigt nicht unbedingt Verständnis, daher richtig, aber ausreichend)

Bea: $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

Inhaltliche Begründung im Bild

Ohne Verbalisierung der Struktur

Alia: Antwort und Begründung: Beide sind gleich groß.

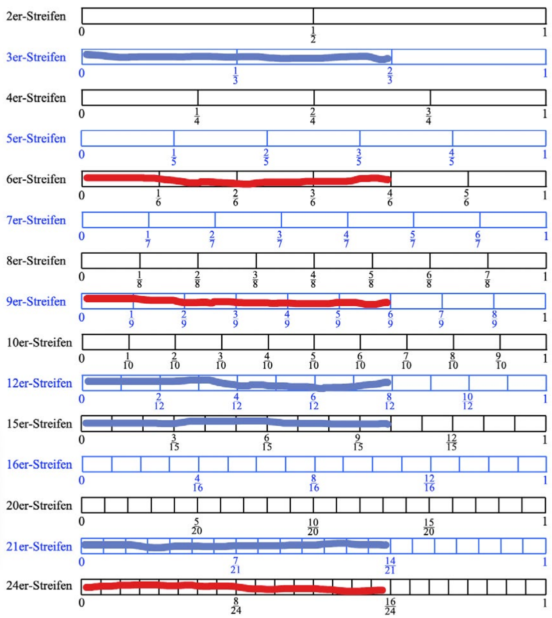


Es wurde mit 3 vergröbert.

Inhaltliche Begründung im Bild

und mit verbalisierter Struktur

Vom inhaltlichen Denken zum Kalkül



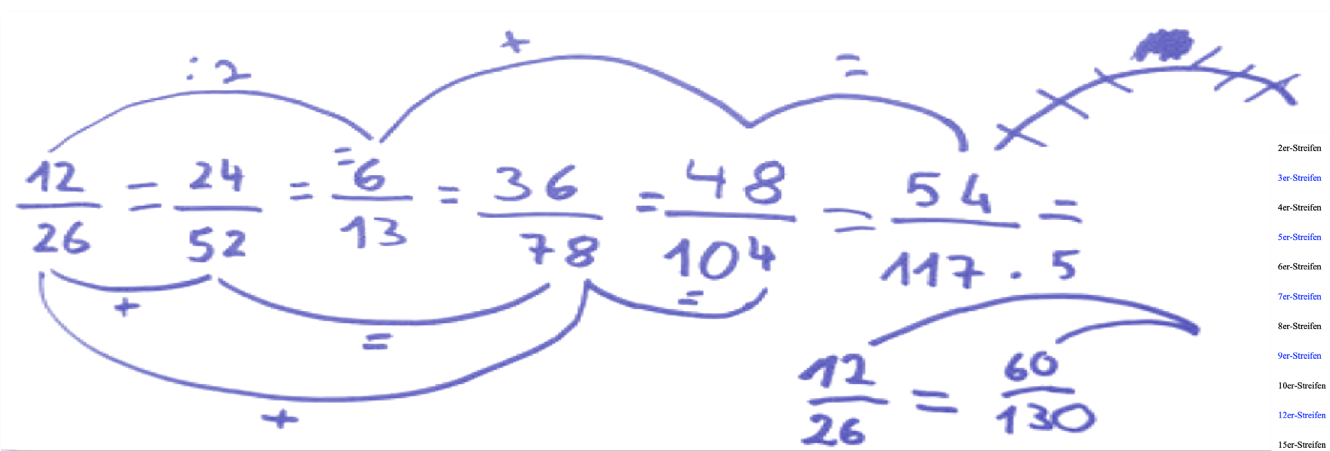
- Schülerinnen und Schüler erlernen die Nutzung der Streifentafel zum Vergleich von Brüchen und zum Finden gleichwertiger Brüche schnell
- auch der Übergang vom graphischen zum rechnerischen Bestimmen (= Kalkül) geht bei viele Kindern schnell, sie finden selbständig eine Erweiterungsregel (einige nur für Faktor 2)
- Dennoch ist bei schwächeren Kindern der Übergang zum Kalkül nicht stabil genug

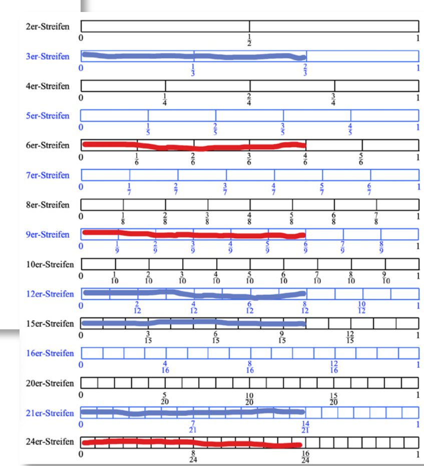
→ Fall-Video nach Einführung der Streifentafel und nach Entdeckung der Erweiterungsregel

Charlotte und Hannah auf dem Lernpfad vom inhaltlichen Denken zum Kalkül

Lernende...

- ... entdecken, dass es unterschiedliche Brüche gibt, die denselben Anteil beschreiben. Diese Brüche nennen wir gleichwertige Brüche.
- ... finden in der Streifentafel zu einem Bruch viele gleichwertige Brüche.
- ... entdecken die symbolischen Umformungen Erweitern und Kürzen als Möglichkeit, auf der symbolischen Ebene schnell gleichwertige Brüche zu finden

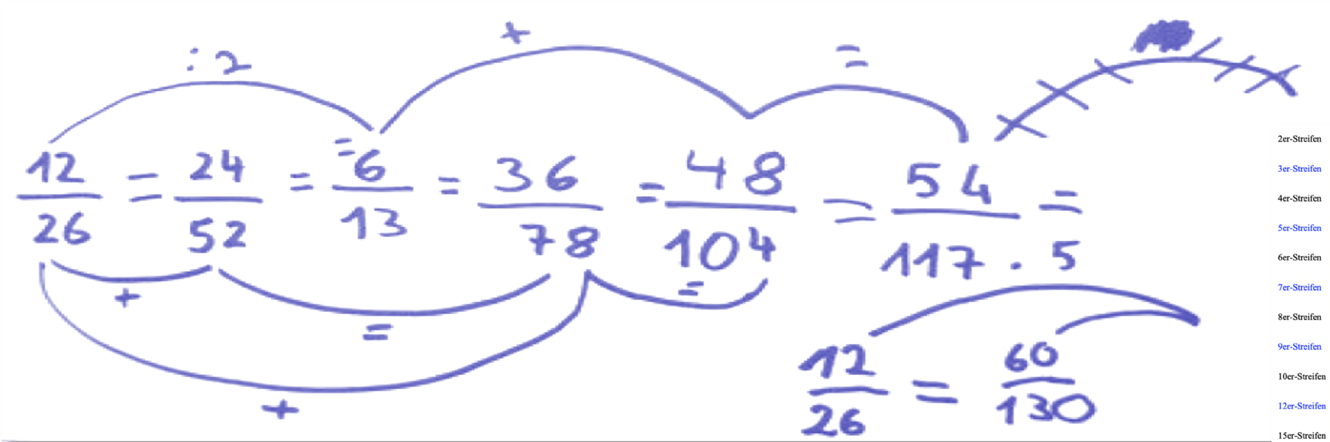


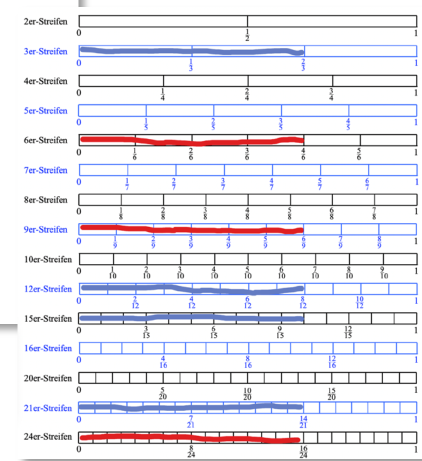


(Prediger 2011)

Fall-Beispiel Charlotte und Hannah

Vielfältige gleichwertige Brüche und kalkülhafte Erweiterungswege gefunden





Video zu dieser Aufgabe

Aufgabe: Alle Teams haben gleich gut getroffen. Ergänze die fehlenden Zahlen und gib die Brüche an.

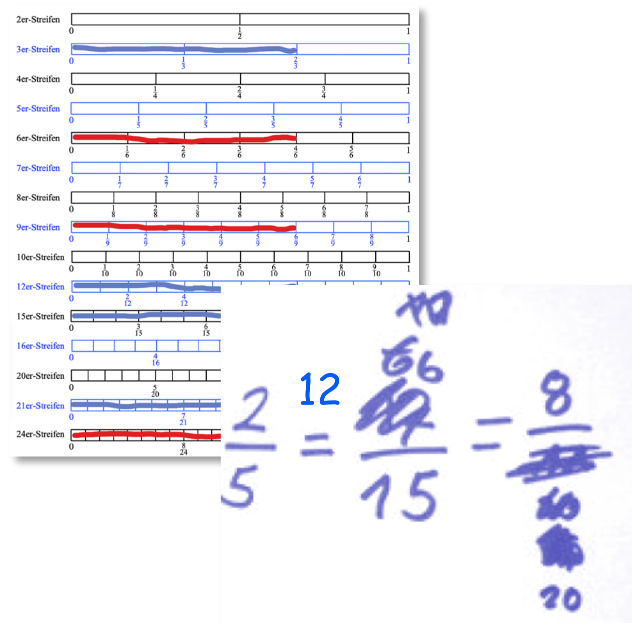
Sverres Team: Bei 2 von 5 Würfen getroffen.	Khaleds Team: ☐ von 15 Würfen getroffen	Renés Team: 8-mal getroffen von ☐ Versuchen.

(Charlotte und Hannah, 6. Kl. Gesamtschule HH
aus Bosseck/Scharenberg 2010)

Fall-Beispiel Charlotte und Hannah – Teil 1

Diagnoseauftrag:

- Wie denken die Kinder?
- Wie wechseln sie zwischen kontextueller, symbolischer und graphischer Darstellung?



Aufgabe: Alle Teams haben gleich gut getroffen. Ergänze die fehlenden Zahlen und gib die Brüche an.

Sverres Team: Bei 2 von 5 Würfen getroffen.	Khaleds Team: ☐ von 15 Würfen getroffen	Renés Team: 8-mal getroffen von ☐ Versuchen.

(Hannah und Charlotte – Video-Teil 1, 4:20 min)

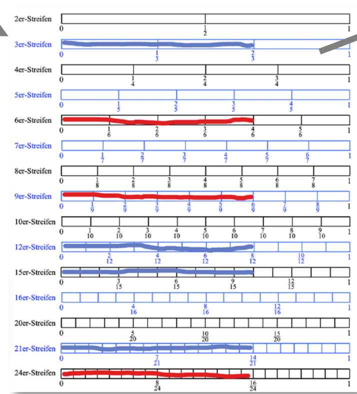
Fazit zum Fall-Beispiel Charlotte und Hannah

Kontextuelle Darstellung (Trefferquoten)

Aufgabe: Alle Teams haben gleich gut getroffen.
Ergänze die fehlenden Zahlen und gib die Brüche an.

Sverres Team: Bei 2 von 5 Würfen getroffen.	Khaleds Team: ☐ von 15 Würfen getroffen	Renés Team: 8-mal getroffen von ☐ Versuchen.

Graphische Darstellung (Streifentafel)



Symbolische Darstellung
(kalkülhafte Umformung)

$$\frac{2}{5} \underset{+10}{\overset{+10}{=}} \frac{12}{15}$$

ODER

$$\frac{2}{5} \underset{\cdot 3}{\overset{\cdot 3}{=}} \frac{6}{15}$$

Typisches Beispiel für misslungene vorschnellen Übergang zum Kalkül, zu fragil da nicht wirklich verknüpft

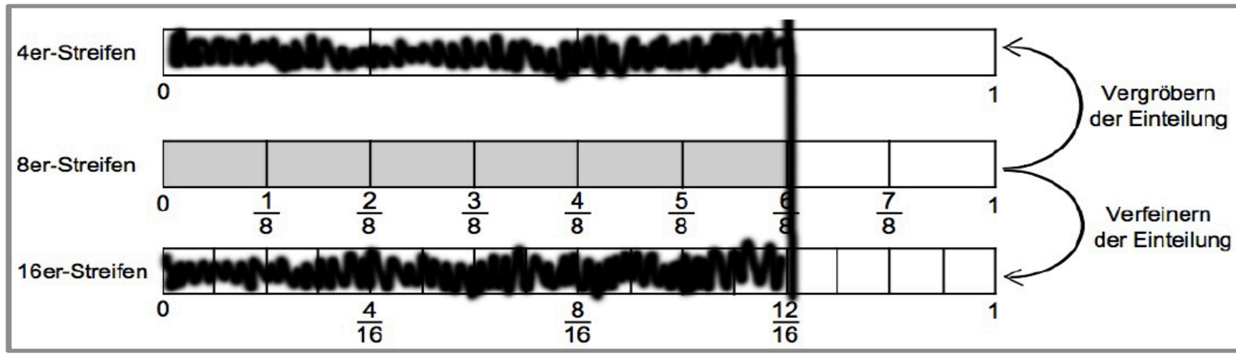
Analyse:

- Wechsel zwischen Darstellungen ohne strukturelle Verknüpfung (verknüpft werden die Zahlen, aber nicht die Operation)
- Rechenregeln wurden in Zahlenmustern entdeckt, aber nicht inhaltlich begründet in Kontext oder Bild
- deswegen Umformung beliebig: Multiplizieren oder Addieren?
- **Notwendig ist echte Vernetzung, d.h. hier inhaltliche Begründung der Erweiterungsregel in Bild oder Kontext**

Verknüpfung von inhaltlichem Denken und Kalkül

Inhaltliche Begründung der kalkülhaften Umformungen
im Bild mithilfe des Vergröberns / Verfeinern

$$\frac{6}{8} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} \frac{12}{16}$$



Überlegen Sie kurz selbst: wie würden Sie inhaltlich die Multiplikation von Zähler und Nenner begründen?

Schreiben Sie Ihre Begründungen in den Chat.

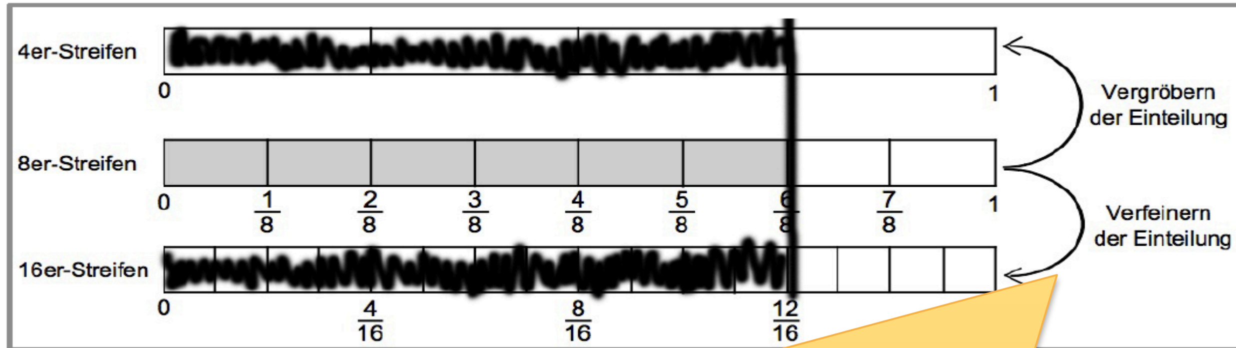
Inhaltliche Begründung der kalkülhaften Umformungen
im Kontext Trefferquote

(Malle 2004; Prediger 2011)

Verknüpfung von inhaltlichem Denken und Kalkül

Inhaltliche Begründung der kalkülhaften Umformungen
im Bild mithilfe des Vergröberns / Verfeinern

$$\frac{6}{8} \overset{\cdot 2}{\underset{\cdot 2}{=}} \frac{12}{16}$$



Das alte **Ganze** ist in acht Felder eingeteilt.
Ich kann das Ganze **feiner einteilen**. **Jedes Achtel–Feld** teile ich dann **in zwei** Felder. Das neue Ganze hat dann $2 \cdot 8 = 16$ Felder, also immer Sechzehntel.
Der alte markierte **Teil** bestand vorher aus sechs Achteln.
Wenn alle Felder **feiner eingeteilt** werden, dann werden aus jedem Achtel-Feld zwei Sechzehntel-Felder, also besteht der neue markierte Teil aus **2** $\cdot$ 6 = 12 Feldern. Der **neue Bruch** ist also 12/16. Insgesamt sind es dann doppelt so viele Felder und es sind auch doppelt so viele Felder markiert, der Anteil bleibt deshalb gleich.

Wenn wir doppelt so oft schießen, müssen wir auch doppelt so oft treffen, um gleich gut zu sein

Inhaltliche Begründung der kalkülhaften Umformungen
im Kontext Trefferquote

(Malle 2004; Prediger 2011)

Verknüpfung von inhaltlichem Denken und Kalkül

Inhaltliche Begründung der kalkülhaften Umformungen
im Bild mithilfe des Vergröberns / Verfeinern

2 Gleichwertige Brüche durch Erweitern und Kürzen finden

2.1 Brüche erweitern

$$\frac{2}{3} \underset{\cdot 7}{\overset{\cdot 7}{=}} \frac{14}{21}$$

Emily

Emily hat einen gleichwertigen Bruch zu $\frac{2}{3}$ mit Bruchstreifen und durch eine Rechnung gefunden. Die Rechnung nennt man *Erweitern*.

Was hat die Rechnung mit dem Bild zu tun?

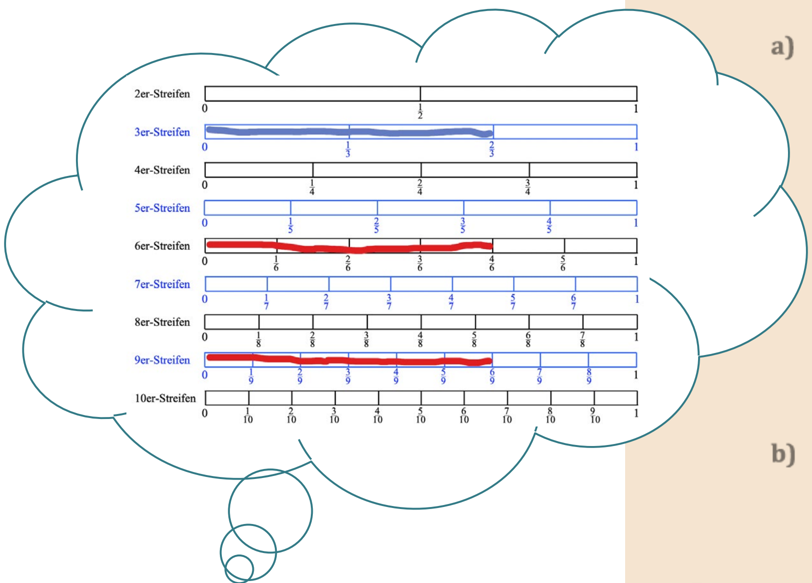
- Was passiert beim Verfeinern im Bild mit Teil und Ganzem?
- Was passiert beim Erweitern in Emilys Rechnung mit Zähler und Nenner?
- Wo sieht man die 7 im Bild?

(Mathe sicher können Baustein B2B, Schink, Prediger & Pöhler 2014)

Verknüpfung von inhaltlichem Denken und Kalkül

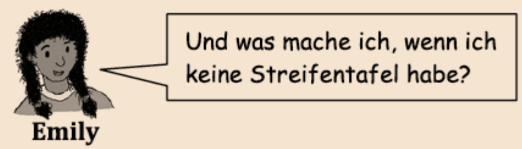
Verinnerlichung der Handlung an Streifentafel anregen

(Lorenz 1992)



1.2 Gleich große Anteile durch Verfeinern im Kopf finden

a)



Stell dir $\frac{1}{4}$ markiert im 4er-Streifen vor.

- Stell dir jetzt die Markierung für $\frac{1}{4}$ im feineren 12er-Streifen vor.
- Wie viele Stücke sind damit auf dem 12er-Streifen markiert?
- Wie viele Zwölftel sind also genauso groß wie $\frac{1}{4}$?
- Kontrolliere mit der Streifentafel.

b) Stell dir jetzt $\frac{3}{4}$ vor. Wie viele Stücke sind jetzt auf dem 12er-Streifen markiert? Wie viele Zwölftel sind also genauso groß wie $\frac{3}{4}$? Kontrolliere mit der Streifentafel.

c) Vergleiche a) und b): Was bleibt gleich, was ändert sich?

d) Stell dir für $\frac{2}{3}$ den gleich großen Anteil im 12er-Streifen im Kopf vor. Kontrolliere mit der Streifentafel.

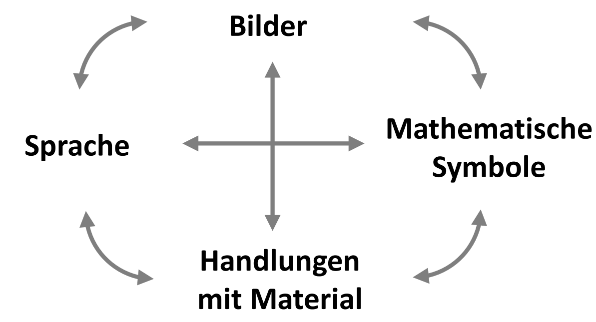
e) Stell dir für $\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}$ jeweils den gleich großen Anteil im 10er- und im 15er-Streifen vor. Was stellst du fest? Kontrolliere mit der Streifentafel.

f) Eine Person sagt einen Anteil, die andere nennt einen dazu passenden feineren Streifen und einen gleich großen Anteil. Kontrolliert immer mit der Streifentafel.

(Mathe sicher können Baustein B2B, Schink, Prediger & Pöhler 2014)

Drei Prinzipien zu Darstellungsformen und ihre Unterschiede

Viele meinen mit allen drei Prinzipien das Gleiche,
aber zwei Gedanken werden expliziter bei Darstellungsvernetzung:



EIS-Prinzip

1. Enaktive – ikonische – symbolische Ebene werden nacheinander durchschritten, um der symbolischen Ebene Bedeutung zu geben

(typisches Missverständnis: einmaliges Durchschreiten reicht, das Symbolische ist der „Endzustand“)

Prinzip des Darstellungswechsels

1. Enaktive – ikonische – symbolische – sprachliche Ebene werden ~~nacheinander~~ stets zusammen betrachtet, um der symbolische Bedeutung zu geben
2. Darstellungen sollten dauerhaft alle adressiert werden, nicht nur 1x beim Einstieg

(typisches Missverständnis: Nebeneinanderstellen reicht, Vernetzen tun die Kinder von selbst)

Prinzip der Darstellungsvernetzung

1., 2.

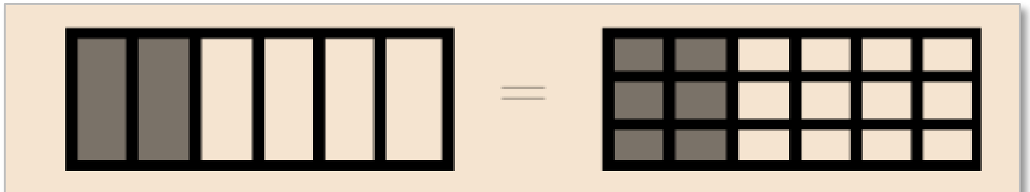
3. Darstellungen müssen explizit vernetzt werden, d.h. Lernende sprechen darüber, wie man die mathematische Strukturen in der je anderen Darstellung sieht

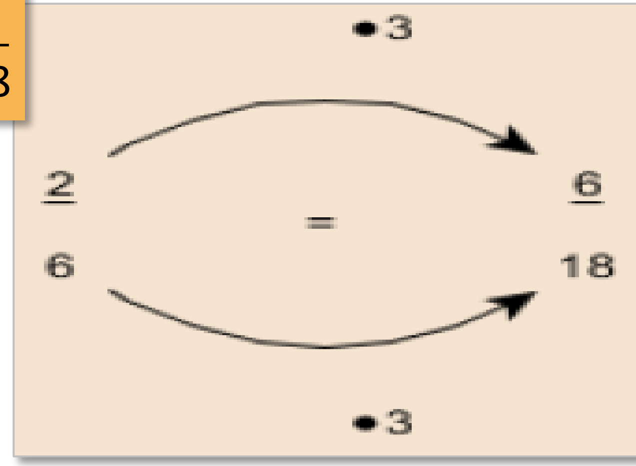
(Prediger & Wessel 2012)

Erklären der Gleichwertigkeit von Brüchen – mit Formulierungshilfen

Schreibauftrag (Klasse 6)
Was bedeutet 2/6 = 6/18? Erkläre schriftlich, wie die Brüche „verwandelt“ werden.
Nutze, falls nötig, folgende Hilfen ....

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$$





. . . wird multipliziert mit . . .

Die untere Zahl . . .

Der Nenner . . .

. . . wird mit . . . mal genommen

Der Zähler . . .

Die obere Zahl . . .

. . . wird mit . . . multipliziert

. . . wird mal genommen mit . . .

Denkphase:

a) Betrachten Sie die Formulierungshilfen rechts: Inwiefern können diese Ihnen (nicht) helfen, Ihre Begründung zu versprachlichen?

b) Welche Sprachmittel fehlen Ihnen?

(Danke für das Beispiel an einen Realschul-Lehrer im Dezember 2014)

Inhalt und Kalkül brauchen verschiedene Sprachhandlungen und Sprachmittel

Fachliches Teilziel

Sprachhandlung

Inhaltliches Denken: Gleichwertigkeit der Brüche verstehen

Erklären von Bedeutungen

Brüche erweitern heißt, die Streifen immer feiner einteilen, der Anteil bleibt gleich

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$$

Wenn ich statt Sechstel nun Achtzehntel betrachte, ist dasselbe Ganze in doppelt so viel Felder eingeteilt. Ich habe also 3 mal so viel Felder. Wenn vorher 2 Sechstel markiert waren, sind es nun drei mal so viel markierte Felder. Also wird oben und unten verdreifacht.

Inhaltliches Begründen des Rechenwegs

Formaler Kalkül: Rechenregel des Erweiterns beherrschen

Erläutern eines Rechenwegs

Brüche werden erweitert, indem sie nach einer bestimmte Zahl multipliziert werden.

(Details in Prediger 2020)

Inhalt und Kalkül brauchen verschiedene Sprachhandlungen und Sprachmittel

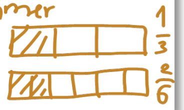
Fachliches Teilziel ⟷ Sprachhandlung ⟷ Sprachmittel

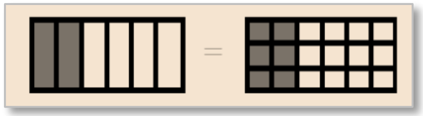
Inhaltliches Denken: Gleichwertigkeit der Brüche verstehen

Erklären von Bedeutungen

Bedeutungsbezogene Sprachmittel

Brüche erweitern heißt, die Streifen immer feiner einteilen, der Anteil bleibt gleich





Anteil: Teil vom Ganzen
Streifen einteilen
gleich großer Anteil
Einteilung feiner machen

Wenn ich statt Sechstel nun Achtzehntel betrachte, ist dasselbe Ganze in doppelt so viel Felder eingeteilt. Ich habe also 3 mal so viel Felder. Wenn vorher 2 Sechstel markiert waren, sind es nun drei mal so viel markierte Felder. Also wird oben und unten verdreifacht.

$$\frac{2}{6} = \frac{6}{18}$$

Inhaltliches Begründen des Rechenwegs

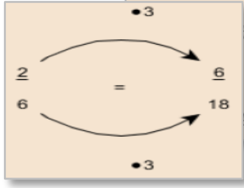
Formaler Kalkül: Rechenregel des Erweiterns beherrschen

Erläutern eines Rechenwegs

Brüche werden erweitert, indem sie nach einer bestimmte Zahl multipliziert werden.

Formalbezogene Sprachmittel

... wird multipliziert mit ...
Die untere Zahl ...
Der Nenner ...
... wird mit ... mal genommen
Der Zähler ...



Lernpfad vom inhaltlichen Denken zum Kalkül: mit fortschreitender Schematisierung

Lernende...

- ... entdecken, dass es unterschiedliche Brüche gibt, die denselben Anteil beschreiben. Diese Brüche nennen wir gleichwertige Brüche.
- ... finden in der Streifentafel zu einem Bruch viele gleichwertige Brüche (zunächst als Ablesen aus der Streifentafel)
- ... entdecken die symbolischen Umformungen Erweitern und Kürzen als Möglichkeit, auf der symbolischen Ebene schnell gleichwertige Brüche zu finden.
- ... sehen in die graphische Handlungen an der Streifentafel die Strukturen hinein, die zu Umformungen passen (Teil und Ganzes immer vervielfachen)
- ... Begründen, wie graphisches und symbolisches Finden gleichwertiger Brüche zusammenpassen (ggf. auch im Kontext)
- ... gewinnen Vertrauen in den Kalkül durch mehrmaliges Überprüfen, dass die inhaltliche und die symbolische Ebene zusammenpassen. (Erhalte ich durch Kürzen wirklich gleichwertige Brüche?)
- Immer wieder inhaltliche Deutung des Kalküls auf der inhaltlichen Ebene: Erweitern lässt sich deuten als feiner Einteilen, Kürzen als gröber Einteilen

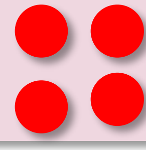
(Prediger in PM Heft 11, 2006)

Gliederung

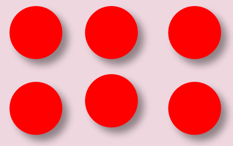
1. Anteil als Teil eines Ganzen – Diagnose und Förderung durch Operatives Prinzip und Kommunikation
2. Durchgängigkeit von Darstellungsmitteln – die Streifentafel
3. Gleichwertigkeit von Brüchen Diagnose und Förderung durch Darstellungsvernetzung und Kommunikation
4. Anteile von Mengen – Diagnose und Förderung von Handeln und Verinnerlichen
5. Überblick über das Fördermaterial

Diagnose zu Anteilen von Mengen (Relative Anteile, Baustein B1C)

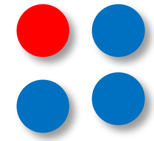
Aufgabe 1:
Zeige mit diesen Plättchen $\frac{3}{4}$



Aufgabe 2:
Zeige mit diesen Plättchen $\frac{2}{3}$



Carolas korrekte Lösung ohne Zögern:



So, geht das,
eben 3 von 4.

Hä? Wie soll das denn gehen?
Nee, das geht gar nicht, weil das ja 6 sind.

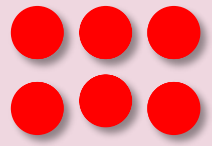
Da müssen ja nur
3 Stücke da sein.

Diagnose:
- Was ist Carolas Problem?
- Wie können wir es überwinden?

(Carola, 7. Kl. Hauptschule, MSK-Video 2021, 1 min.)

Diagnose zu Anteilen von Mengen (Relative Anteile, Baustein B1C)

Aufgabe 2:
Zeige mit diesen Plättchen $\frac{2}{3}$

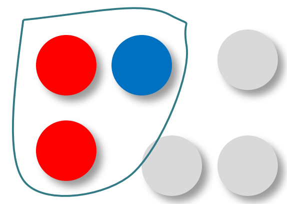


Diagnose:
- Was ist Carolas Problem?

Nee, das geht gar nicht, weil das ja 6 sind.

Da müssen ja nur 3 Stücke da sein

(Carola, 7. Kl. Hauptschule)

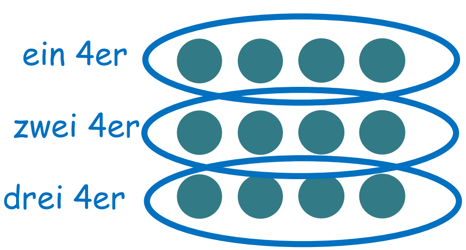


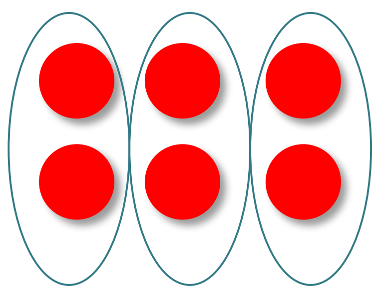
$\frac{2}{3}$ als 2 von 3
(Überbetonte Vorstellung absoluter Anteil)

Ansatz zur Förderung:
- Wie können wir es überwinden?

Relative Anteile erfordern das Denken in flexiblen Bündeln

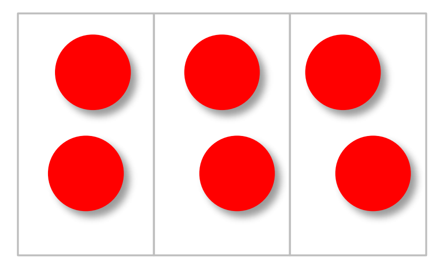
Analogie zur Bündelung bei der Multiplikation natürlicher Zahlen





$\frac{2}{3}$ als 2 von 3 Bündeln, auch wenn Bündel größer als 1 sind

Vernetzen mit Bruchstreifen:



$\frac{1}{3}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{3}$

Bruch als relativer Anteil

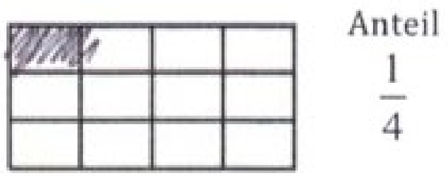
Ausgangsproblem:

- fast alle Lernende haben die Grundvorstellung vom Anteil
  als Beziehung zwischen Teil und Ganzen in simplen Fällen erworben
- ABER: nur wenige können sie in anderen Situationen
  auf komplexere Fälle übertragen (wie z.B. Carola)

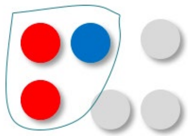
Konsequenzen für die Förderung:

- Sorgfältiger Vorstellungsaufbau mit Handlungsbezug
  und sprachliche Begleitung notwendig
- danach muss systematischer Übergang
  zum symbolischen Rechnen angeleitet werden

Aaron



Carola



$\frac{2}{3}$ von 6

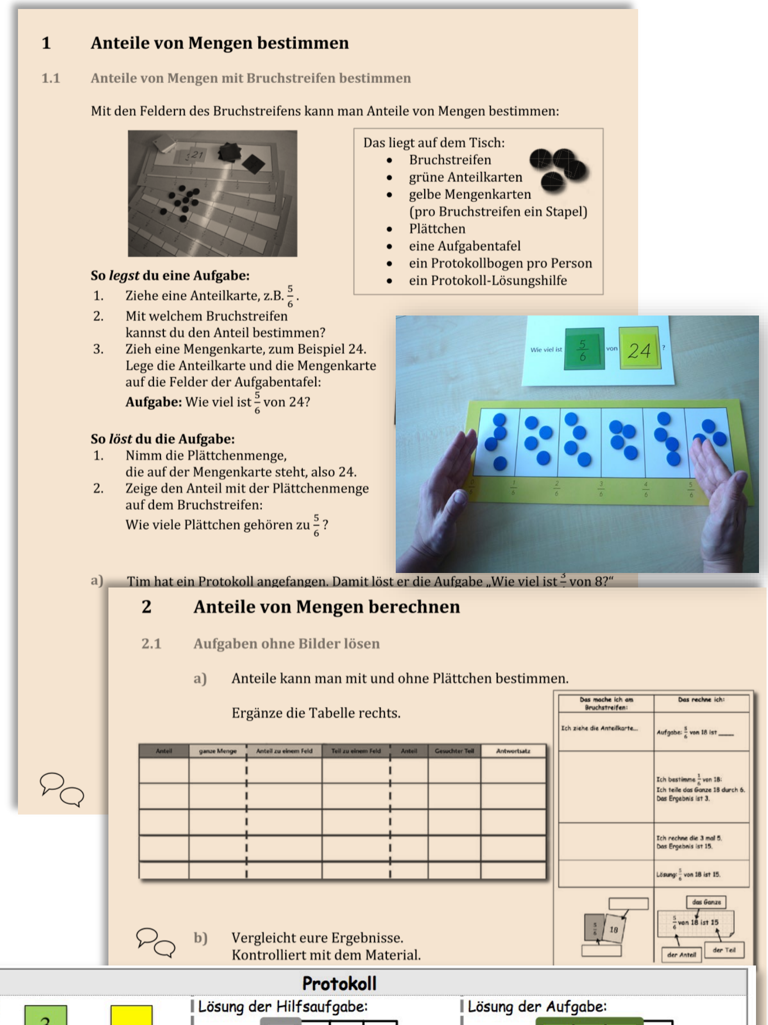
(Prediger, Krägeloh, Wessel 2013; Schink, Prediger & Pöhler 2014: Baustein B1C)

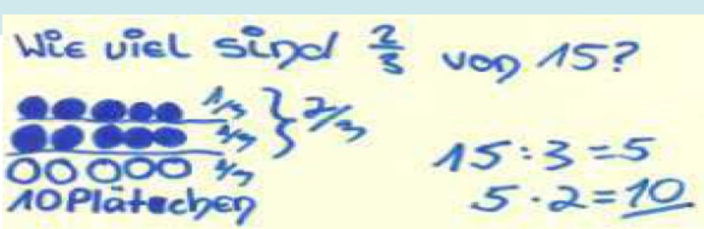
Aktivität: Fördereinheit B1C zum relativen Anteil durchdenken

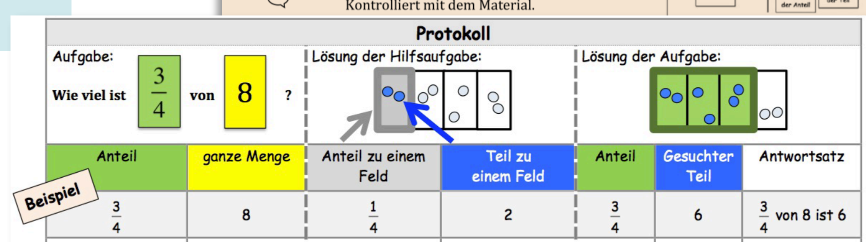
Förderungsmöglichkeiten in den Fördereinheiten identifizieren:

Probieren Sie das Bruchstreifenmaterial in Partnerarbeit selbst aus und schauen Sie sich die abgebildeten Aufgaben an.

- Was können Ihre Lernenden mit dem Material lernen?
- Inwieweit unterstützt das Material die Förderung des Bildens und Umbildens von Einheiten?
- Welche Bedeutung hat der Protokollbogen (Aufgabe 1.1 a) für den Lernprozess?
- Wie lösen sich die Lernenden vom Material (Aufgabe 2.1)?
- Wie wird sichergestellt, dass die Darstellungen vernetzt werden?



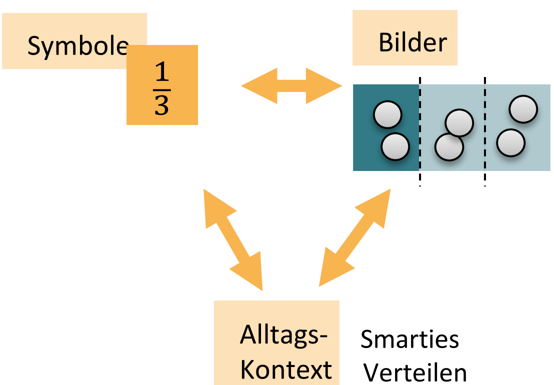




Was liefern die meisten Schulbücher, was braucht es noch mehr?

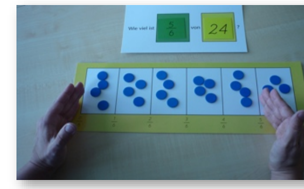
In allen Schulbüchern vertreten:

- Bruch als Teil eines Ganzen
- Dominanz der Kreis-Bilder oder beliebige Figuren



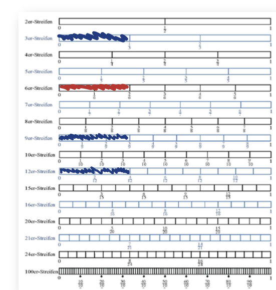
Aber mehr Verständnis notwendig:

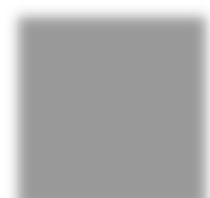
- weitere Grundvorstellungen zu Brüchen wie Verhältnisse, quasiordinale Vorstellung etc. (nicht MSK)
- Operationsverständnis von Brüchen:
  - relative Anteile (3/4 von 24)
  - Brüche vergleichen und erweitern
  - Brüche addieren und subtrahieren
  - Brüche multiplizieren und dividieren (nicht MSK)



Darstellungen ausweiten auf Streifen und Rechteckbilder

- Streifen nutzbar für
  - Brüche vergleichen und erweitern
  - Brüche schätzen
  - Brüche addieren und subtrahieren
  - Brüche dividieren (nicht MSK)
- Rechteckbild nutzbar für
  - Brüche vergleichen und erweitern
  - Brüche addieren und subtrahieren
  - Brüche multiplizieren (nicht MSK)



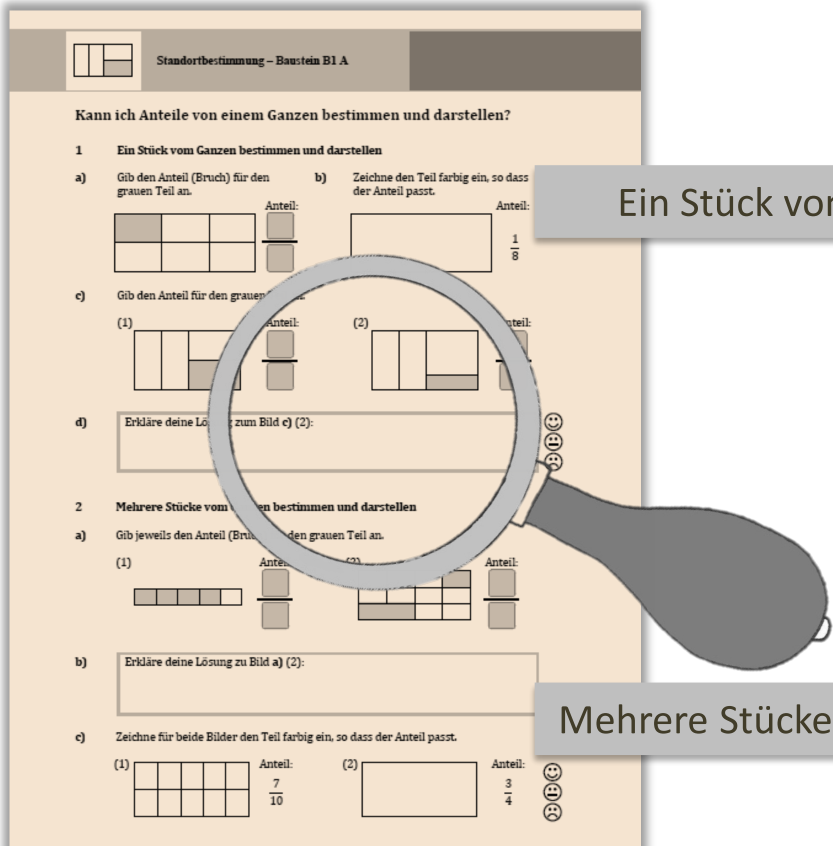


Förderung zu B1 A: Im Überblick

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

Verstehensgrundlagen identifizieren

Verstehensgrundlagen fördern



Standortbestimmung – Baustein B1 A

Kann ich Anteile von einem Ganzen bestimmen und darstellen?

1 Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

a) Gib den Anteil (Bruch) für den grauen Teil an. Anteil:

b) Zeichne den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. Anteil: $\frac{1}{8}$

c) Gib den Anteil für den grauen … (1) Anteil: (2) …teil:

d) Erkläre deine Lö… zum Bild c) (2):

2 Mehrere Stücke vom … en bestimmen und darstellen

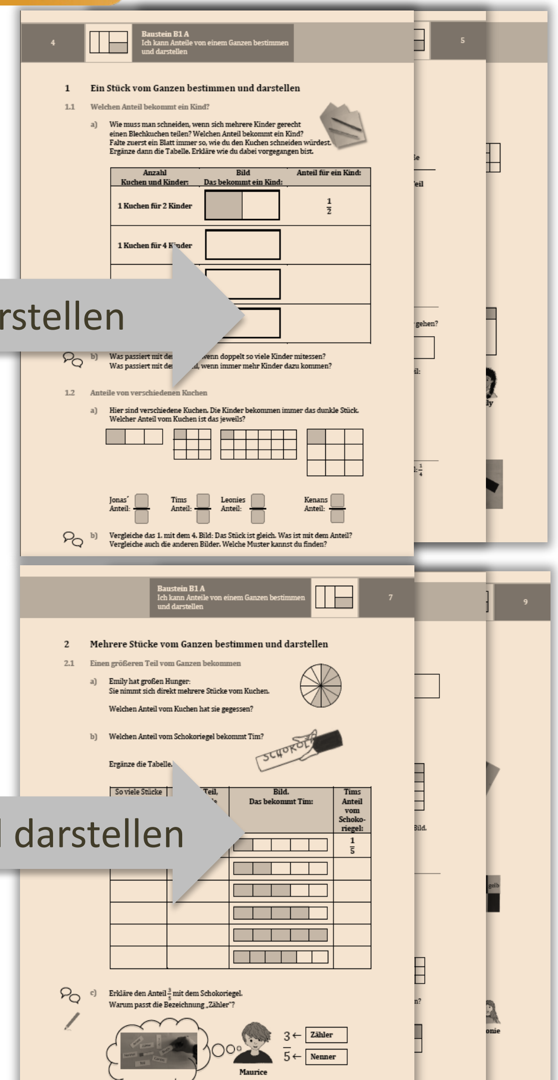
a) Gib jeweils den Anteil (Bru… den grauen Teil an. (1) Ante… (2) Anteil:

b) Erkläre deine Lösung zu Bild a) (2):

c) Zeichne für beide Bilder den Teil farbig ein, so dass der Anteil passt. (1) Anteil: $\frac{7}{10}$ (2) Anteil: $\frac{3}{4}$

Ein Stück vom Ganzen bestimmen und darstellen

Mehrere Stücke vom Ganzen bestimmen und darstellen



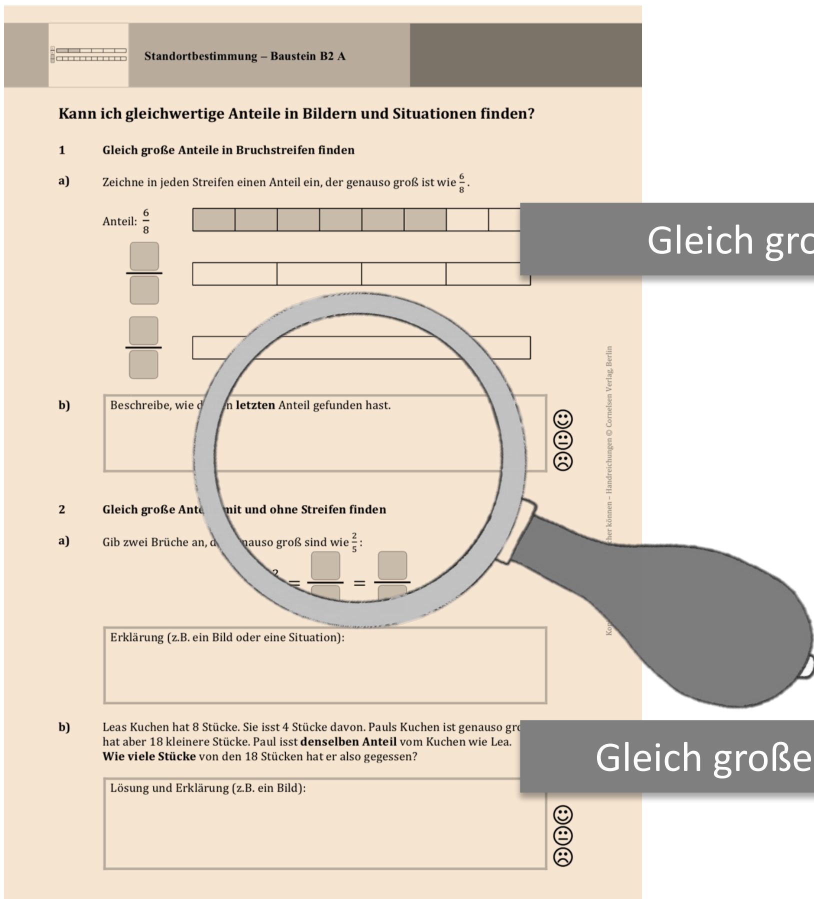
Mathe sicher können-Förderung zu B2 A/B: Im Überblick

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

Verstehensgrundlagen identifizieren

Verstehensgrundlagen fördern

B2 A



Standortbestimmung – Baustein B2 A

Kann ich gleichwertige Anteile in Bildern und Situationen finden?

1 Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

a) Zeichne in jeden Streifen einen Anteil ein, der genauso groß ist wie $\frac{6}{8}$.

Anteil: $\frac{6}{8}$

b) Beschreibe, wie d… n **letzten** Anteil gefunden hast.

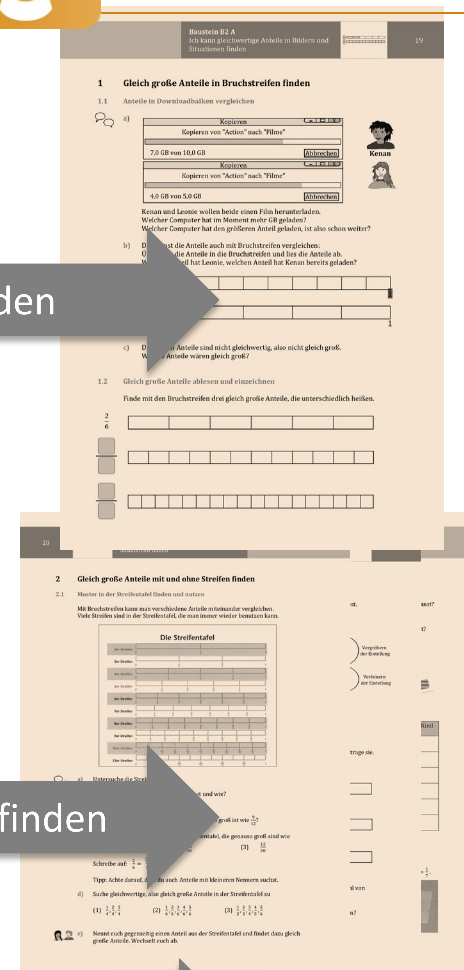
2 Gleich große Ante… mit und ohne Streifen finden

a) Gib zwei Brüche an, d… nauso groß sind wie $\frac{2}{5}$:

Erklärung (z.B. ein Bild oder eine Situation):

b) Leas Kuchen hat 8 Stücke. Sie isst 4 Stücke davon. Pauls Kuchen ist genauso gr… hat aber 18 kleinere Stücke. Paul isst **denselben Anteil** vom Kuchen wie Lea. **Wie viele Stücke** von den 18 Stücken hat er also gegessen?

Lösung und Erklärung (z.B. ein Bild):



Gleich große Anteile in Bruchstreifen finden

Gleich große Anteile mit und ohne Streifen finden

Symbolisches Erweitern und Kürzen

B2 B

B2 B

(Schink, Prediger & Böhler 2014)

Förderbausteine von „Mathe sicher können“ zu Brüchen

Inhaltsverzeichnis der Förderbausteine

Ihr Fazit

Twitter-Runde

Was ist das Wichtigste, das Sie von heute
für Ihren Unterricht mitnehmen?

Twitter-Regeln:

- Alle dürfen sich beim Twittern äußern (hier mündlich), aber keiner muss.
- Jede Twitter-Nachricht ist auf 280 Zeichen begrenzt.
- Es gibt keine feste Reihenfolge und kein Melden.

Fazit

- Typische Ursachen für Schwierigkeiten mit Brüchen:
  Unzureichend ausgebildetes **Bruchverständnis**
  bzw. lückenhafte inhaltliche Bruchvorstellungen
- dies trifft in der Regel nicht allein die Vorstellung vom Anteil als Teil eines Ganzen, sondern vor allem das **Operationsverständnis**
- notwendig sind nicht nur Kreisbilder, sondern vor allem die **Streifendarstellung**, die sich für das inhaltlich begründbare Operieren mit Brüchen deutlich mehr bewährt
- bei der Förderung wichtig sind
  - Durchgängigkeit der Darstellungen, insbesondere der Streifen
  - Darstellungsvernetzung statt Darstellungswechsel
  - Operatives Prinzip zum Herstellen von Zusammenhängen
  - Verbalisieren der Beziehungen, ggf. mit Sprachunterstützung

Verstehengrundlagen aufarbeiten – auch ohne Corona

(Prediger, Selter, Hußmann, Nührenbörger 2014)

Verstehensgrundlagen identifizieren

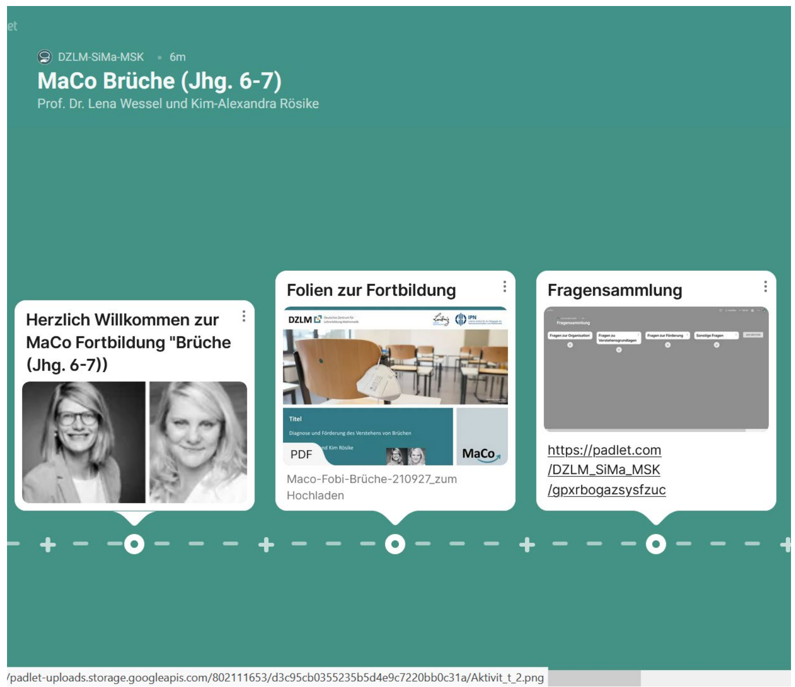
Verstehensgrundlagen diagnostizieren

Verstehensgrundlagen fördern

Haben Sie noch Fragen?

Gerne in die Fragensammlung!

Wir werden auch FAQs vorbereiten und ins Netz stellen



Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

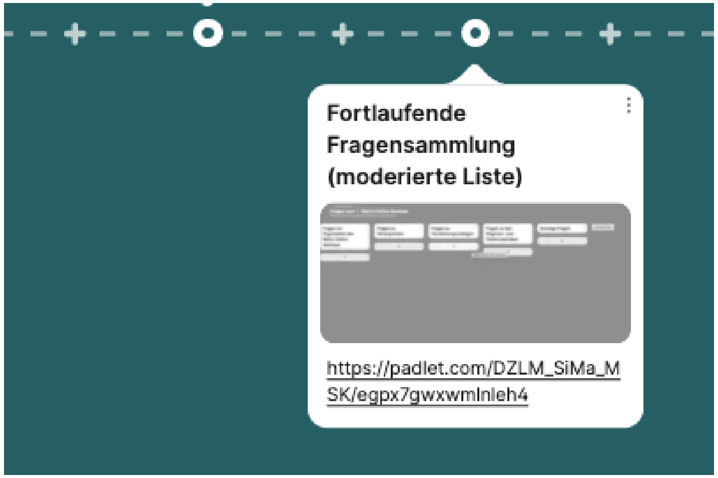
Verstehens-orientierung

Diagnose-geleitetheit

Kommunikations-förderung

Was tun in diesem Schuljahr, um das halb verlorene Jahr aufzuholen?

Haben Sie noch Fragen?
Gerne in die Fragensammlung,
beantworten wir in den nächsten Seminaren!



MaCo

Gerade zum Aufholen von Lernzeit müssen wir den Kampf gegen Oberflächlichkeit gewinnen

Förderunterricht für mehr Lernende etablieren

Förderunterricht nächstes Schuljahr fortsetzen

Flächendeckend diagnostizieren

vieles in den Regelunterricht einbauen

MaCo

Melden Sie sich gerne an
zu weiteren Veranstaltungen!

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit
und aktive Beteiligung!

Wir sind für Fragen noch
etwas weiter in der Leitung.

27.09.2021 (Montag) 16.30–18:30 Uhr	**Brüche (Jhg. 6–7)** mit Lena Wessel & Kim Rösike	Anmeldung
	Beschreibung	
06.10.2021 (Mittwoch) 16.30–18:30 Uhr	**Dezimalzahlverständnis (Jhg. 5–7)** mit Florian Schacht & Lara Sprenger & Stephan Hußmann & Sümmeyye Erbay	Anmeldung
	Beschreibung	
20.10.2021 (Mittwoch) 16.30–18.30 Uhr	**Funktionen (Jhg. 7–11)** mit Leander Kempen & Carina Zindel	Anmeldung
	Beschreibung	
28.10.2021 (Donnerstag) 16.30–18.30 Uhr	**Prozentverständnis (Jhg. 7–8)** mit Birte Friedrich-Pöhler	Anmeldung
	Beschreibung	
02.11.2021 (Dienstag) 16.30–18.30 Uhr	**Stellenwertverständnis (Jhg. 4–5)** mit Kim Rösike & Alexandra Dohle	Anmeldung
	Beschreibung	
09.11.2021 (Dienstag) 16.30–18.30 Uhr	**Variablen, Terme, Gleichungen (Jhg. 8–11)** mit Bärbel Barzel, Marita Friesen, Anika Dreher, Lars Holzäpfel, Katrin Klingbeil, Timo Leuders, Fabian Rösken	Anmeldung

Literatur

Schink, A., Prediger, S. & Pöhler, B. (2014). Förderbausteine und Handreichungen zum Bruchverständnis. In S. Prediger, C. Selter, S. Hußmann, M. Nührenbörger (Hrsg.), Mathe sicher können. Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Förderbausteine Brüche, Prozente und Dezimalzahlen (S. 4-48). Berlin: Cornelsen Schulverlage.
(Online frei zugänglich unter mathe-sicher-koennen.dzlm.de/003)

Weitere zitierte Literatur

Hasemann, K. (1986). Bruchvorstellungen und die Addition von Bruchzahlen. Mathematik lehren 16, 16-19.

Hefendehl-Hebeker, L. (1996). Brüche haben viele Gesichter. Mathematik lehren 78, 20-48.

Malle, G. (2004): Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. Mathematik lehren 123, 4 – 8.

Padberg, F. & Wartha, S. (2017). Didaktik der Bruchrechnung. Wiesbaden: Springer Spektrum.

Prediger, S. & Schink, A. (2014): Verstehensgrundlagen aufarbeiten im Mathematikunterricht – fokussierte Förderung statt rein methodischer Individualisierung. PÄDAGOGIK, 66(5), 21-25.
(Online zugänglich unter http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~prediger/publikationen. htm)

Prediger, S. (2020). Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe - ein forschungsbasiertes Praxisbuch. Berlin: Cornelsen.