



Bildquelle: unsplash.com
marco fileccia @fileccia

Verstehensgrundlagen zu Funktionen (Jhg. 7–10)

Leander Kempfen & Carina Zindel

MaCo 



Was sind aus Ihrer Sicht die essentiellen Inhalte in der Sekundarstufe, ohne die man nicht Weiterlernen kann?



Technisches zu unserem Online-Seminar heute

Heute sind **182** Teilnehmende angemeldet.

So geht passive Beteiligung

- Aufzeichnung der Veranstaltung und weitere Angebote auf <https://maco.dzlm.de/>

So geht aktive Beteiligung heute:

Seminar-Padlet für 22.06.2022

<https://padlet.com/leanderkempen/v2p138k68jkw1uo2>

direkt Lesezeichen auf das Padlet setzen, brauchen wir öfters

Padlet des MaCo-Online-Seminars zu Verstehensgrundlagen von Fznrktionen 20.10.2021

Jhg. 7-11 Verstehensgrundlagen zu Funktionen

Folien der Veranstaltung

Willkommen, hier sind Sie richtig!

Carina Zindel & Leander Kempen

Fortlaufende Fragensammlung (moderierte Liste)

<https://padlet.com/leanderkempen/7beltmnp2p19sr4!>

Fragen zum MaCo-Online-Seminar "Funktionen"
(Werden jeweils erst durch Moderatorin freigeschaltet)

Fragen zur Organisation des MaCo-Online-Seminars

Fragen zu Hintergründen

Fragen zu Verstehensgrundlagen

Fragen zu den Diagnose- und Fördermaterialien

Technisches zu unserem Online-Seminar heute

So geht passive Beteiligung:

- Aufzeichnung der Veranstaltung und weitere Angebote auf <https://maco.dzlm.de/>
- speziell: <https://maco.dzlm.de/verstehensgrundlagen-zu-funktionen>

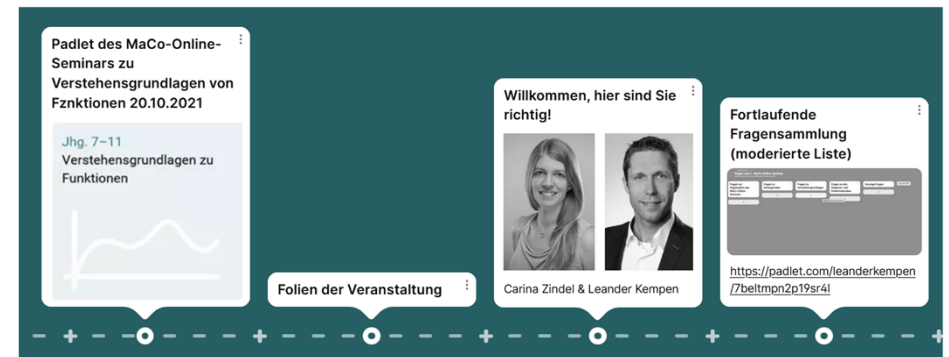
So geht aktive Beteiligung heute:

Für alle auf dem Padlet:

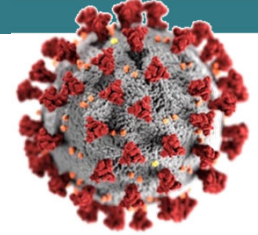
- Denkaufträge
- Moderierte Fragensammlung, werden wir ausgewählt einbringen

Für Zoom-Nutzende zusätzlich:

- Zoom-Chat für informellen Austausch unter Teilnehmenden (überblicken ReferentInnen nur teilweise)

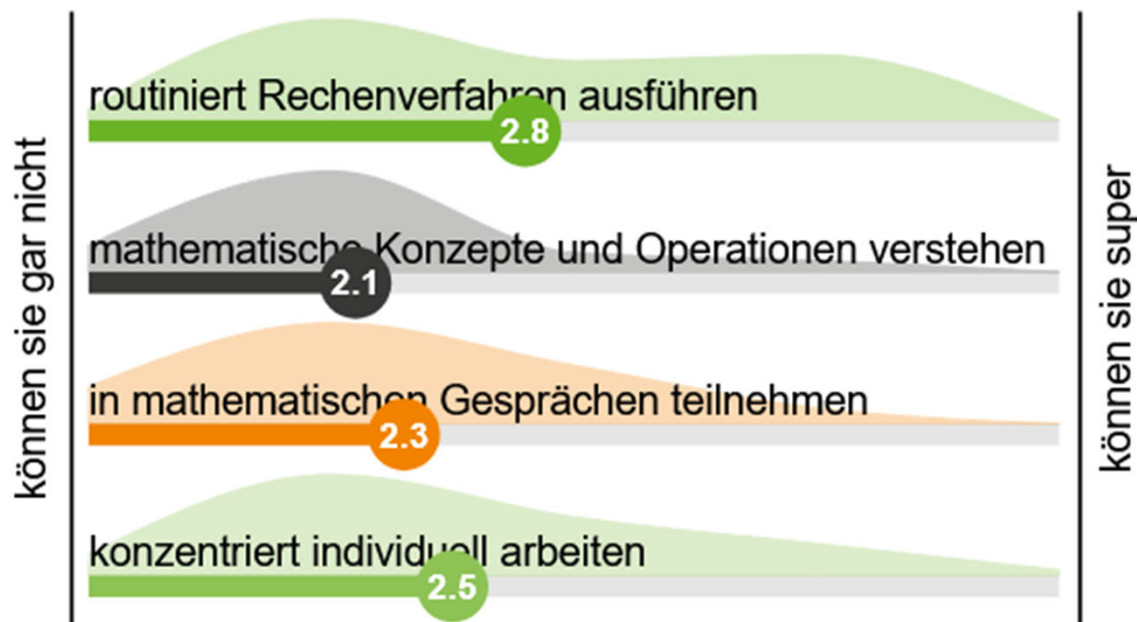


Wie ist es bei Ihnen?

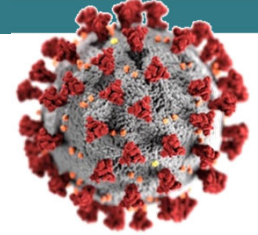


Umfrage zu Corona-Schäden (Aktivität 1 - Padlet):

Was können Ihre schwachen Lernenden nach den vielen Schulschließungen kaum, was sehr gut?

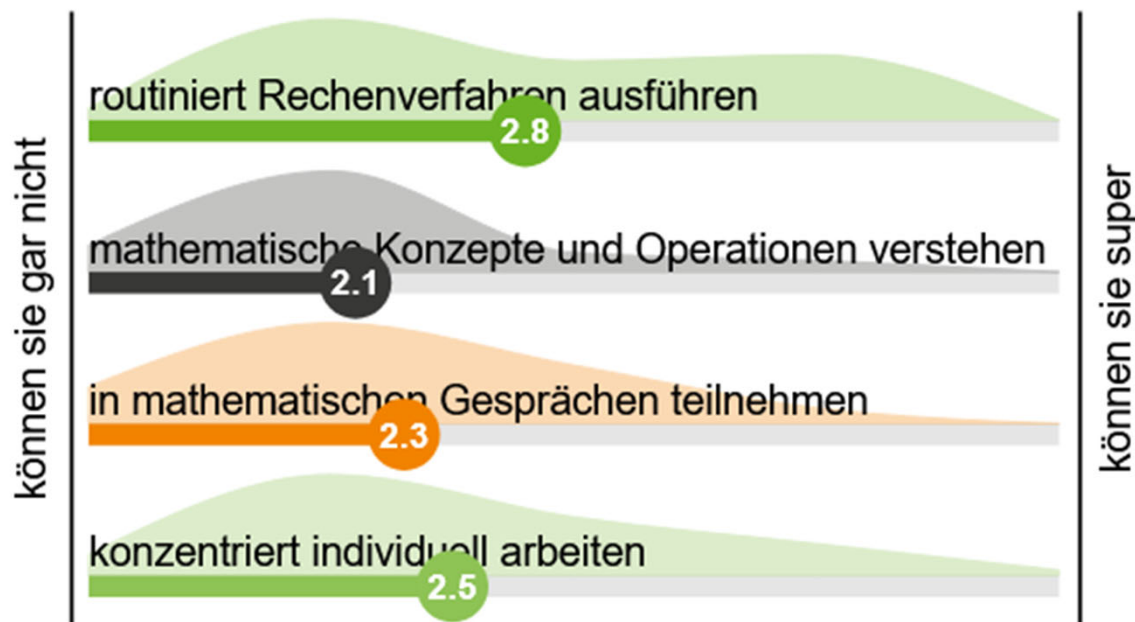


Wie ist es bei Ihnen?



Umfrage zu Corona-Schäden (Aktivität 1 - Padlet):

Was können Ihre schwachen Lernenden nach den vielen Schulschließungen kaum, was sehr gut?



← Dafür gibt es viele gute Trainings-Tools, auch digital, daher nicht unser Fokus

Diese beiden Kompetenzen müssen wir gezielt fördern, weil sie für das Weiterlernen total wichtig sind.

Aber dazu gibt wenig Hilfe in vielen Schulbüchern, deswegen Fokus von MaCo

Heute: „Funktionsverständnis“

Einstiegsbeispiel: Realschule, 9. Klasse

Schreibe eine Textaufgabe zum Funktionsterm $y = 0,2x + 5$ oder $y = 3x + 1$.

10 Minuten kosten bei einem Telefonat von einem Handy $y = 10 + 0,2 = 10,20\text{€}$
Wie viel kosten bei einem Telefonat von einem Handy 5min.
 $y = 0,2x + 5 = 5,20\text{€}$

Fabienne

... 1€ Grundgebühr auf dem Handy
3€ pro minute (Anruf)
wie viel zahle ich, wenn ich 2 St Telefoniert habe?
 $y = 3x + 1$
 $y = 3 \cdot 120 + 1$
 $y = 361\text{€}$

Paul

Ein Freund von dir braucht Hilfe beim Umzug... Er bringt ein 5m langes Brett, davon sägt er alle 5min ab.

Nach wie vielen Minuten ist das Brett auseinander gesägt?
Sven

Ich möchte 3 Tomaten kaufen, und kriege 1 gratis dazu.
Klara

Generelles Problem:

Vielen Lernenden fehlt ein Verständnis für Variablen und funktionale Zusammenhänge.

Offene Frage: Inwieweit beschreibt $y = 0,2x + 5$ für sie einen allgemeinen Zusammenhang?

Gliederung

1. Einstieg

2. **Verstehensgrundlagen von funktionalen Zusammenhängen**



Worauf kommt es an?



Wie diagnostizieren wir sie?



Wie fördern wir sie? Fach- und Sprachintegriert!



Wie fördern wir sie? Darstellungsvernetzung!

3. Förderbausteine zu Verstehensgrundlagen

4. Zusammenfassung und Ausblick

Zum Einstieg

Familie Wacker fährt mit ihrem Auto in den Urlaub. Ihr Fahrzeug hat einen Bordcomputer, der während der Fahrt u. a. Informationen über gefahrene Kilometer und Kraftstoffverbrauch berechnet und anzeigt.

Für das Auto von Familie Wacker lässt sich der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch (in l / 100km) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (in km/h) näherungsweise mit der Gleichung berechnen:

$$f(x) = 0,0005 \cdot (x - 40)^2 + 4,5462.$$

- a) Wie hoch ist der durchschnittliche Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 150km/h? Notiere deine Rechnung.

$$f(x) = 0,0005 \cdot (150-40)^2 + 4,5462 \dots$$

- b) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn 9,0 l auf 100 km verbraucht werden? Notiere deine Rechnung.

$$9 = 0,0005 \cdot (x-40)^2 + 4,5462 \dots$$

Aktivität 2 (Padlet):

Welche Schwierigkeiten würden Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe bei Ihren Lernenden vermuten?

Verstehensgrundlagen identifizieren – Beispielaufgabe



Familie Wacker fährt mit ihrem Auto in den Urlaub. Ihr Fahrzeug hat einen Bordcomputer, der während der Fahrt u. a. Informationen über gefahrene Kilometer und Kraftstoffverbrauch berechnet und anzeigt.

Für das Auto von Familie Wacker lässt sich der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch (in l / 100km) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (in km/h) näherungsweise mit der Gleichung berechnen:

$$f(x) = 0,0005 \cdot (x - 40)^2 + 4,5462.$$

Kraftstoffverbrauch

Geschwindigkeit

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 150km/h? Notiere deine Rechnung.

$$f(x) = 0,0005 \cdot (150-40)^2 + 4,5462 \dots$$

b) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn 9,0 l auf 100 km verbraucht werden? Notiere deine Rechnung.

$$9 = 0,0005 \cdot (x-40)^2 + 4,5462 \dots$$

Ergebnisse aus dem Projekt MuM-ZP:

- a) von **49,9 %** der Lernenden gelöst
- b) von **11%** der Lernenden gelöst
- Sprachlich Schwache noch mehr Probleme als sprachlich Starke!

Ein zentrale Anforderung:
Verstehen der funktionalen Abhängigkeit (≠ mit Funktionen rechnen können)

Was macht das Verstehen funktionaler Zusammenhänge aus?



Funktionstypen und ihre Eigenschaften

- Sinusfunktionen
 - Amplitude
 - Periode
 - Grad- und Bogenmaß
- Exponentielle Funktionen
 - Wachstum
 - Anfangswert
 - Wachstumsfaktor
 - Transformation
- Quadratische Funktionen
 - Verdopplungszeit
 - Normalform
 - Öffnung
 - Scheitelpunktform
 - Symmetrie
- Lineare Funktionen
 - Achsenabschnitte
 - Nullstelle
 - y-Achsenabschnitt
 - Steigung
 - Graph
 - Steigungsdreieck
- (anti)proportionale Zuordnungen
 - Quotientengleichheit
 - Funktionsgleichung
 - Produktgleichheit
 - Proportionalitätsfaktor
- Zuordnungen
 - Zuordnungsvorschrift
 - Wortform
 - Tabelle
 - Diagramm

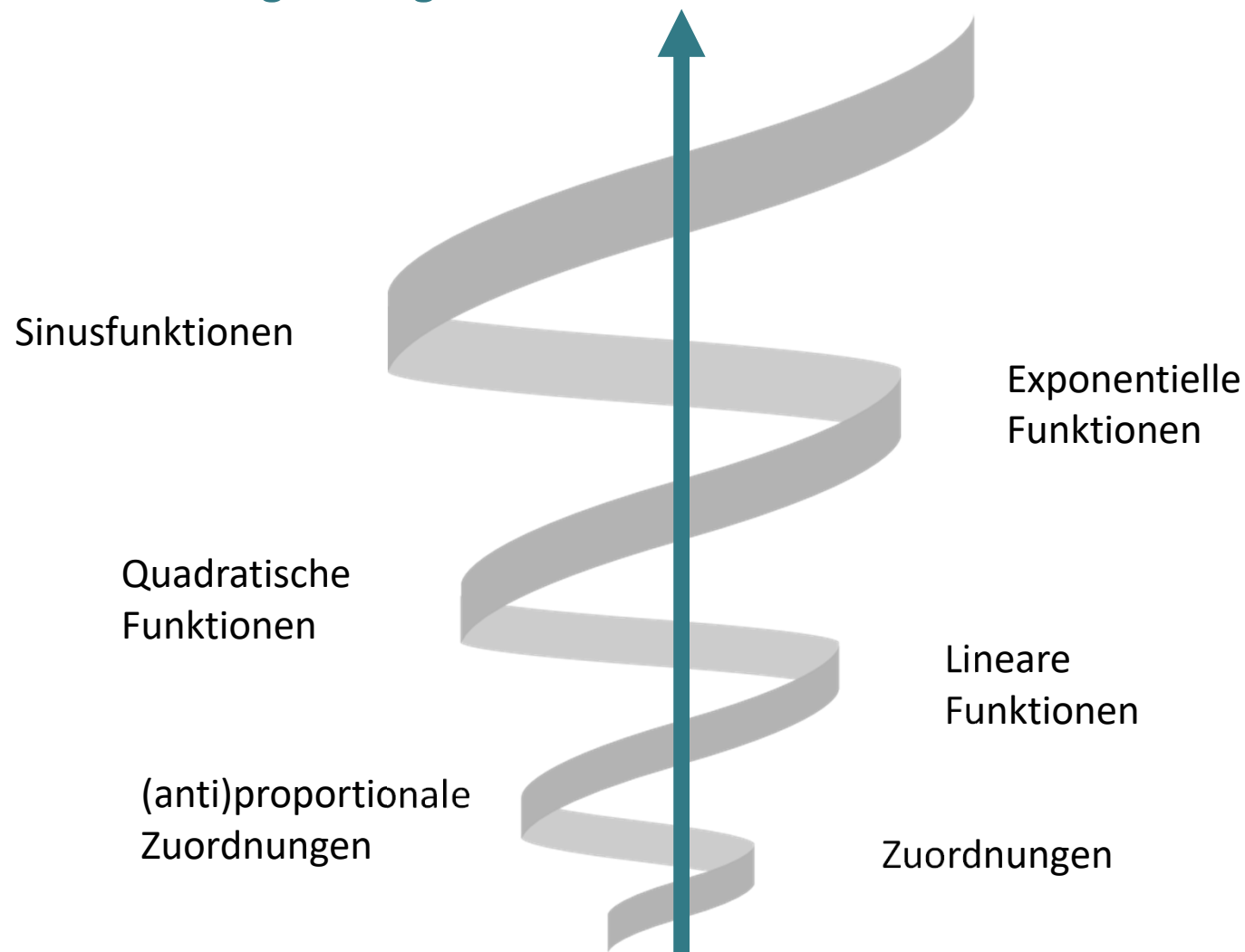
Verstehensgrundlagen = Eigenschaften einzelner Funktionstypen? – NEIN!

Was macht das Verstehen funktionaler Zusammenhänge aus?



- Wenn es nicht die Eigenschaften einzelner Funktionstypen sind, was sind dann die Verstehensgrundlagen, die spiralscurricular zum Weiterlernen benötigt werden?

Was sind die Verstehensgrundlagen?



Verstehensgrundlagen zu funktionalen Zusammenhängen



- Identifizieren der beiden beteiligten Größen

Es geht um den Kraftstoffverbrauch und die Geschwindigkeit.

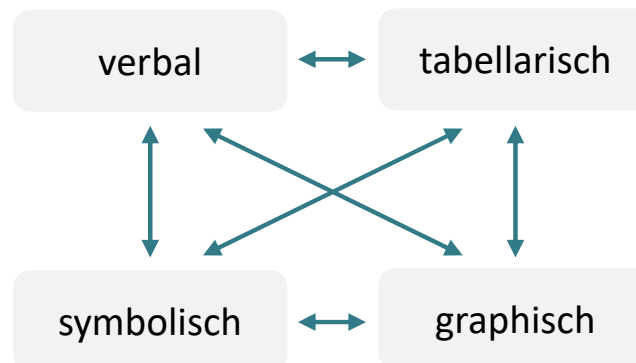
- Erkennen der funktionalen Abhängigkeit

Der Kraftstoffverbrauch hängt von der Geschwindigkeit ab. Wenn man die Geschwindigkeit ändert, ändert sich auch der Kraftstoffverbrauch.

- Inhaltliche Deutung von Wertepaaren

Bei einer Geschwindigkeit von 150 km/h beträgt der Kraftstoffverbrauch ca. 10,6 l/100 km

- Vernetzen von Darstellungen



Familie Wacker fährt mit ihrem Auto in den Urlaub. Ihr Fahrzeug hat einen Bordcomputer, der während der Fahrt u. a. Informationen über gefahrene Kilometer und Kraftstoffverbrauch berechnet und anzeigt.

Für das Auto von Familie Wacker lässt sich der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch (in l / 100km) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (in km/h) näherungsweise mit der Gleichung berechnen:

$$f(x) = 0,0005 \cdot (x - 40)^2 + 4,5462.$$

- a) Wie hoch ist der durchschnittliche Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 150km/h? Notiere deine Rechnung.

$$f(x) = 0,0005 \cdot (150 - 40)^2 + 4,5462 \dots$$

- b) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn 9,0 l auf 100 km verbraucht werden? Notiere deine Rechnung.

$$9 = 0,0005 \cdot (x - 40)^2 + 4,5462 \dots$$

Diese Verstehensgrundlagen sind unabhängig vom Funktionstyp!

Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen



Stream für alle

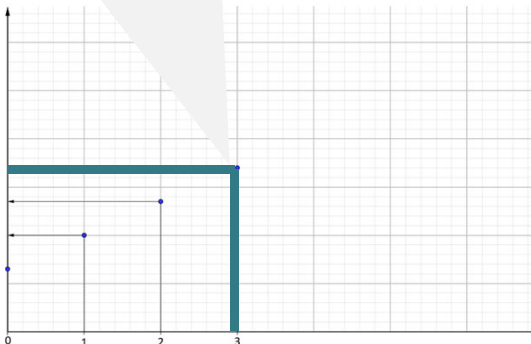
Nach einer Anmeldegebühr von 13 € zahlen Sie für unser gesamtes Streamingangebot nur 7 € pro Monat.

Funktionaler Zusammenhang

Zuordnung

Einer Größe wird eine andere Größe zugeordnet.

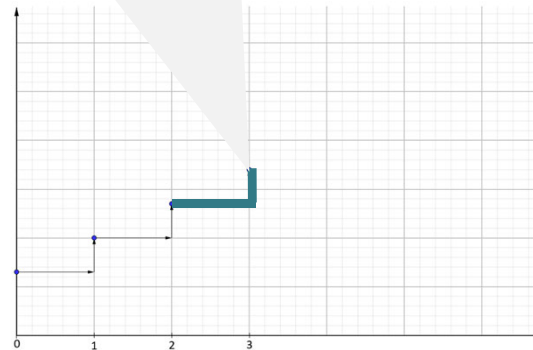
Nach 3 Monaten zahlt man insgesamt 34 Euro.



Kovariation

Die Änderungen einer Größe bewirken Änderungen der anderen Größe.

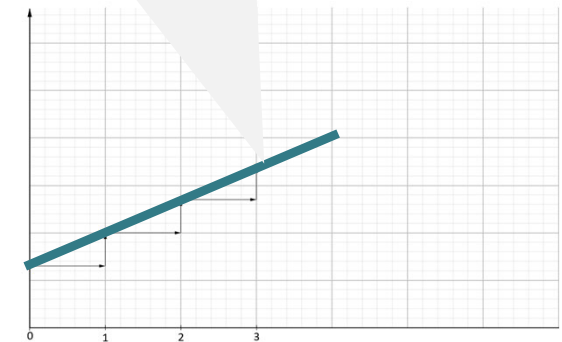
Pro Monat kommen 7 Euro hinzu.



Funktion als Ganzes

Der Zusammenhang wird als Ganzes betrachtet.

Der Gesamtpreis wächst konstant.



Grundvorstellungen zu funktionalen Zusammenhängen



Stream für alle

Nach einer Anmeldegebühr von 13 € zahlen Sie für unser gesamtes Streamingangebot nur 7 € pro Monat.

In Darstellungen unterschiedliche Grundvorstellungen zu aktivieren, ist eine weitere Verstehensgrundlage!

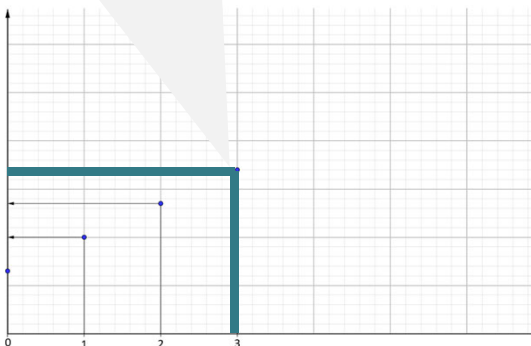
$$x \rightarrow f(x) = 7x + 13$$

Gesamtpreis (Euro)	Anzahl der Monate
	0
20	
	2
34	

Diagram showing the table with arrows indicating the calculation of the total price for 3 months. On the left, three boxes with plus signs and arrows point to the rows: the first is empty, the second contains '7', and the third is empty. On the right, three boxes with plus signs and arrows point to the rows: the first is empty, the second is empty, and the third is empty. The final result '34' is highlighted in the bottom row.

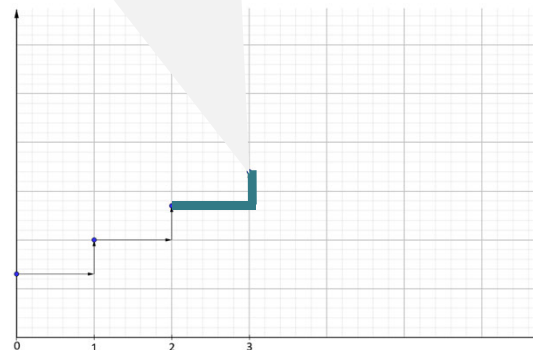
Zuordnung

Nach 3 Monaten zahlt man insgesamt 34 Euro.



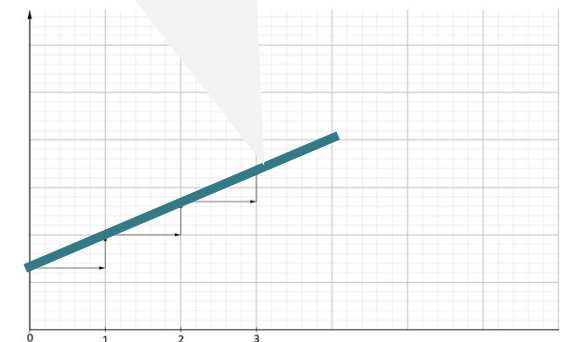
Kovariation

Pro Monat kommen 7 Euro hinzu.



Funktion als Ganzes

Der Gesamtpreis wächst konstant.





Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an:

$$f(x) = 2x - 5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:

$$f(x) = 0,5x + 2,5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

Aktivität 3 (Padlet):

Welche (sprachlich bedingten) Schwierigkeiten würden Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgaben bei Ihren Lernenden vermuten?

Verstehensgrundlagen beim Lesen von Textaufgaben



1. Bewusstheit für relevante Sprachmittel
2. Sensibilität für Vielfalt möglicher Sprachmittel
3. Tragfähige Interpretation zur Klärung der Bedeutung der Variablen in der Funktionsgleichung

Beispiele für sprachliche Mittel:

Die Funktion gibt **den Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl verkaufter Bücher** an.

Die Funktion **ordnet der Anzahl verkaufter Bücher den Gewinn zu**.

Die Funktion **gibt zu jeder Anzahl verkaufter Bücher den Gewinn an**.

Unabhängige Größe → **Abhängige Größe**

Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an:

$$f(x) = 2x - 5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:

$$f(x) = 0,5x + 2,5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?



Verstehensgrundlagen beim Sprechen über Funktionale Zusammenhänge

1. Verfügen über relevante Sprachmittel
2. Flexibilität bei der Nutzung der Sprachmittel

Aktivität 3b (Padlet):

Wie könnte über Flohmarkt 2 gesprochen werden? Inwiefern unterscheidet sich das von Flohmarkt 1?

Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an:

$$f(x) = 2x - 5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:

$$f(x) = 0,5x + 2,5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

Bei Flohmarkt 1 geht es um den Gewinn und die Anzahl der Bücher.

Wenn mehr Bücher verkauft werden, erhöht sich der Gewinn.

x steht für die Anzahl verkaufter Bücher, f(x) steht für den Gewinn, der von x abhängt.



Verstehensgrundlagen beim Sprechen über Funktionale Zusammenhänge

1. Verfügen über relevante Sprachmittel
2. Flexibilität bei der Nutzung der Sprachmittel

Bei Flohmarkt 2 geht es auch um den Gewinn und die Anzahl der Bücher.

Wenn mehr Gewinn gemacht werden soll, dann erhöht sich die Anzahl der Bücher, die man dafür verkaufen müsste.

x steht für den Gewinn, $f(x)$ steht für die Anzahl der Bücher, die von x abhängt.

Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an:

$$f(x) = 2x - 5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:

$$f(x) = 0,5x + 2,5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

Bei Flohmarkt 1 geht es um den Gewinn und die Anzahl der Bücher.

Wenn mehr Bücher verkauft werden, erhöht sich der Gewinn.

x steht für die Anzahl verkaufter Bücher, $f(x)$ steht für den Gewinn, der von x abhängt.

Zusammenhang fachliche Teilziele – Sprachhandlungen – Sprachmittel



Fachliches Teilziel

Sprachhandlung

Sprachmittel

Inhaltliches Denken:

Funktionale Zusammenhänge mathematisieren und interpretieren

Erklären von Bedeutungen

Die Funktionsgleichung gibt an, wie der Gesamtpreis von der Anzahl der Monate abhängt. Wenn die Anzahl der Monate höher ist, ist auch der Gesamtpreis höher. x steht hier für die Anzahl der Monate, y steht für den Gesamtpreis, der von der Anzahl der Monate abhängt.

Am Graphen kann man ablesen, dass man nach zwei Monaten 45 € bezahlen muss.

Bedeutungsbezogene Sprachmittel

... hängt ab von ...

Es geht um den Zusammenhang von ... und ...

Der Graph / die Tabelle zeigt, wie ... von ... abhängt.

Anzahl Monate	Gesamtpreis

Formaler Kalkül:

Funktionswerte berechnen

Erläutern eines Rechenwegs

Um x auszurechnen, muss die Funktionsgleichung nach x umgestellt werden. Dazu kann man auf beiden Seiten dieselbe Rechnung durchführen.

Am Graphen kann man ablesen, dass bei $x = 2$, $y = 45$ ist.

Formalbezogene Sprachmittel

Wenn für x ... eingesetzt wird, ist y

Wenn für y ... eingesetzt wird ..., ist x

Im Graphen/ in der Tabelle ist bei $x = \dots$, $y = \dots$

Anzahl Monate	Gesamtpreis

Gliederung

1. Einstieg

2. **Verstehensgrundlagen von funktionalen Zusammenhängen**



Worauf kommt es an?



Wie diagnostizieren wir sie?



Wie fördern wir sie? Fach- und Sprachintegriert!



Wie fördern wir sie? Darstellungsvernetzung!

3. Förderbausteine zu Verstehensgrundlagen

4. Zusammenfassung und Ausblick

Übersicht: Diagnostizieren von Verstehensgrundlagen



Mit Fokusfragen zum Verstehen funktionaler Zusammenhänge ...

Nach Bedeutungen fragen:

- Um welche Größen geht es?
- Welche Größe ist abhängig von welcher?
- Was bedeutet ...?
- Wofür stehen die Variablen... ? / steht die Zeile? / steht der Punkt?

... und damit bedeutungsbezogene Sprache einfordern durch ...

- Sprachanlässe
- Schreibanlässe

... und das in und mit den verschiedenen Darstellungen!

Diagnostizieren durch Fokusfragen



Fokusfragen zum Verstehen funktionaler Zusammenhänge:

- Um welche **Größen** geht es?
- Welche **Größe ist abhängig** von welcher?

HelloStream

Unsere günstige TV-Box gibt es bereits für 10 €.
Pro Monat zahlen Sie für unser komplettes Angebot nur 7 €.

Mögliche Lernenden-Antworten:

Es geht um den Zusammenhang von **Nutzungsdauer** und der **Kosten**.

Die **Kosten** hängen also **von** der **Nutzungsdauer** ab.

Wenn ich die **Nutzungsdauer** kenne, **dann** weiß ich auch die **Kosten**.


- In allen drei Antworten werden die **beteiligten Größen** explizit gemacht
- Mit Sprachmitteln wie „hängt ab von ...“ wird auch die **Richtung der Abhängigkeit** explizit gemacht
- „wenn ..., dann ...“-Sätze können ebenfalls die Richtung der Abhängigkeit andeuten


Anhand der Antworten der Lernenden kann diagnostiziert werden, ob der funktionale Zusammenhang passend **identifiziert** und treffsicher **beschrieben** wurde.


Verstehensgrundlagen diagnostizieren – Beispielaufgabe aus Material



Bei dem Streamingdienst HelloStream wird durch die Gleichung $g(x) = 9 \cdot x + 28$ der Anzahl der gekauften Filme der Gesamtpreis zugeordnet.

-  a) Wofür stehen die Variablen x und $g(x)$ im Kontext von HelloStream?
Welche Bedeutung haben die 9 und die 28?

-  b) Was bedeutet $g(3)$?

-  c) Wie könnte ein passender Angebotstext von HelloStream lauten?

HelloStream

Verstehensgrundlagen diagnostizieren – Beispielaufgabe



Adressierte Verstehensgrundlagen:

- Beteiligte Größen und die Richtung der Abhängigkeit;
Sensibilität für Sprachmittel „wird zugeordnet“
- Inhaltliche Deutung von Wertepaaren
- Vernetzung von Darstellungen;
Verfügen über bedeutungsbezogene Sprachmittel

Bei dem Streamingdienst HelloStream wird durch die Gleichung $g(x) = 9 \cdot x + 28$ der Anzahl der gekauften Filme der Gesamtpreis zugeordnet.

a) Wofür stehen die Variablen x und $g(x)$ im Kontext von HelloStream?
Welche Bedeutung haben die 9 und die 28?

b) Was bedeutet $g(3)$?

c) Wie könnte ein passender Angebotstext von HelloStream lauten?

HelloStream

Mögliche nicht-tragfähige Strategien von Lernenden zur Erschließung der Bedeutung der Variablen:

- erstgenannte Größe immer als die unabhängige Größe betrachten
- Sprachmittel nicht beachten und anhand von sonstigen Kontextüberlegungen die Bedeutung der Variablen erschließen

Zwischenfazit 1



- Verstehensgrundlagen sind zum Weiterlernen wichtig, da sie sich nicht auf Detailwissen, sondern auf grundlegende Vorstellungen beziehen, z. B.:

i. Identifizieren der beteiligten Größen

ii. Erkennen der Richtung der Abhängigkeit

iii. Inhaltliche Deutung von Wertepaaren

iv. Vernetzen von Darstellungen im Hinblick auf i)-iii)

- Verstehensgrundlagen können durch Fokusfragen und entsprechende Aufgabenformate diagnostiziert werden. Dabei wird bedeutungsbezogene Sprache eingefordert und gleichsam diagnostiziert, z. B.:

- Um welche Größen geht es?
- Wie hängen die beiden Größen voneinander ab?
- Was bedeutet $g(3)$? (siehe Abb. rechts)
- Wie könnte ein passender Angebotstext zur Funktionsgleichung lauten? (siehe Abb. rechts)
- usw.

- Identifizieren der beiden beteiligten Größen

Es geht um den Kraftstoffverbrauch und die Geschwindigkeit.

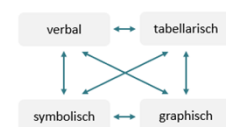
- Erkennen der funktionalen Abhängigkeit

Der Kraftstoffverbrauch hängt von der Geschwindigkeit ab. Wenn man die Geschwindigkeit ändert, ändert sich auch der Kraftstoffverbrauch.

- Inhaltliche Deutung von Wertepaaren

Bei einer Geschwindigkeit von 150 km/h beträgt der Kraftstoffverbrauch ca. 10,6 l/100 km

- Vernetzen von Darstellungen



Familie Wacker fährt mit ihrem Auto in den Urlaub. Ihr Fahrzeug hat einen Bordcomputer, der während der Fahrt, z. B. Informationen über gefahrene Kilometer und Kraftstoffverbrauch berechnen und anzeigt.

Für das Auto von Familie Wacker lässt sich der durchschnittliche Kraftstoffverbrauch (in l/100km) in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit (in km/h) näherungsweise mit der Gleichung beschreiben:

$$f(x) = 0,0005 \cdot (x - 40)^2 + 4,5462$$

a) Wie hoch ist der durchschnittliche Verbrauch bei einer Geschwindigkeit von 150 km/h? Notiere deine Rechnung.
 $f(150) = 0,0005 \cdot (150 - 40)^2 + 4,5462$

b) Wie hoch ist die Geschwindigkeit, wenn 9,0 l auf 100 km verbraucht werden? Notiere deine Rechnung.
 $9 = 0,0005 \cdot (x - 40)^2 + 4,5462$

Diese Verstehensgrundlagen sind unabhängig vom Funktionstyp!

Bei dem Streamingdienst HelloStream wird durch die Gleichung $g(x) = 9 \cdot x + 28$ der Anzahl der gekauften Filme der Gesamtpreis zugeordnet.

a) Wofür stehen die Variablen x und $g(x)$ im Kontext von HelloStream? Welche Bedeutung haben die 9 und die 28?

b) Was bedeutet $g(3)$?

c) Wie könnte ein passender Angebotstext zur Funktionsgleichung lauten? (siehe Abb. rechts)

HelloStream

Gliederung

1. Einstieg

2. **Verstehensgrundlagen von funktionalen Zusammenhängen**



Worauf kommt es an?



Wie diagnostizieren wir sie?



Wie fördern wir sie? Fach- und Sprachintegriert!



Wie fördern wir sie? Darstellungsvernetzung!

3. Förderbausteine zu Verstehensgrundlagen

4. Zusammenfassung und Ausblick



Für die Richtung der Abhängigkeit sensibilisieren

– Sprache einfördern

Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an:

$$f(x) = 2x - 5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen, um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt. Die folgende Funktionsgleichung ordnet jedem Gewinn die Anzahl der Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:

$$f(x) = 0,5x + 2,5$$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Welchen Gewinn macht Max, wenn er 12 Bücher verkauft?

Also hier steht Gewinn die Anzahl der Bücher. Also man gewinnt ja der Anzahl der Bücher. Aber man verkauft ja Bücher um den Preis ja zu gewinnen. Ja. Also so wie eigentlich da (*zeigt auf Flohmarkt 1*).

Linda

So wie ich das verstanden hab ist hier auch der Gewinn von der Anzahl der Bücher abhängig, weil der Gewinn wird dem zugeordnet.

Anton

...weil hier ja steht [...] ordnet jedem Gewinn die Anzahl zu.

Leyla

Die Funktionsgleichung gibt den Preis, also den Endpreis sozusagen an, in Abhängigkeit der verkauften Bücher. Also in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher ...

Ahmet

Sprache einfordern: Beispiel



Funktionale Zusammenhänge umformulieren

Schreibauftrag J: Biologische Sachsituation mit Funktionen beschreiben

Bei einem biologischen Versuch wurde untersucht, wie sich die Anzahl der Zellteilungen einer Zellkultur mit der Zeit entwickelt. Die Funktion gibt näherungsweise für jeden Zeitpunkt die Anzahl der Zellteilungen bis zu diesem Zeitpunkt an: $f(x) = 0,5 x^2$

- Formuliere den funktionalen Zusammenhang aus dieser Situation mit anderen Worten. Finde mehrere Möglichkeiten.

Schreibprodukt mit vier Formulierungsvariationen von Lena und Melissa am Ende der Fördereinheit:

Die Anzahl der Zellteilungen ist abhängig von dem Zeitpunkt.

Die Funktion gibt die Anzahl d. Zellteilungen in Abhängigkeit von d. Zeitpunkt an.

• Dem Zeitpunkt wird die Anzahl d. Zellteilungen zugeordnet.

• Die Funktion ordnet dem Zeitpunkt die Anzahl d. Zellteilungen zu.

Sprache einfordern: Beispiel 2



In der vorherigen Aufgabe haben die SuS für den „Polizei-Azubi Tim“ die Bremswege zu zwei Geschwindigkeiten berechnet:

Bei 35 km/h beträgt der Bremsweg 12,25 m.

Bei 65 km/h beträgt der Bremsweg 42,25 m.

Beim Vergleich der beiden Geschwindigkeiten fragt sich Tim, ob es richtig sein kann, dass die Bremswege unterschiedlich lang sind. Was antwortet ihr? **Notiert eure Antwort.**

Lösungen einer 8. Klasse (Gymnasium):

Je höher die Geschwindigkeit,
desto länger der Bremsweg

Frida

Je höher die Geschwindigkeit, desto
länger der Bremsweg.
Daher ist es möglich sowie unklar, dass
die Bremswege unterschiedlich lang sind.

Anton

Je höher die ~~Bremsweg~~
~~igkeit~~ desto niedriger
der ~~Bremsweg~~
Geschwindigkeit
Je Schneller desto
kürzer ist der Brems-
weg

Stefan

Formulierungen variieren



Welche alternativen
Formulierungen passen zu
welcher Flohmarkt-Aufgabe?
Finde weitere passende
Formulierungen.

Flohmarkt 1

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt.
Die folgende Funktionsgleichung
gibt seinen Gewinn in Abhängigkeit von
der Anzahl der verkauften Bücher an:
 $f(x) = 2x - 5$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen,
um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Flohmarkt 2

Max verkauft Bücher auf dem Flohmarkt.
Die folgende Funktionsgleichung
ordnet jedem Gewinn die Anzahl der
Bücher zu, die er dafür verkaufen müsste:
 $f(x) = 0,5x + 2,5$

Wie viele Bücher muss Max verkaufen
um einen Gewinn von 15 € zu erzielen?

Welchen Gewinn macht Max, wenn er
12 Bücher verkauft?

Gezielte Kontrastierung von Variationen:

- Die Funktionsgleichung gibt den Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher an.
- Die Funktionsgleichung ordnet dem Gewinn die Anzahl verkaufter Bücher zu.
- Die Funktionsgleichung gibt die Anzahl der verkauften Bücher in Abhängigkeit von dem Gewinn an.
- Mit der Funktionsgleichung kann ich in Abhängigkeit vom Gewinn die Anzahl der verkauften Bücher berechnen.
- Mit der Funktionsgleichung kann ich den Gewinn in Abhängigkeit von der Anzahl der verkauften Bücher berechnen.
- ...

Aktivität

Reflektieren Sie, welche Einsichten Lernende bei der Bearbeitung der obigen Aufgabenstellung gewinnen können.

Formulierungen variieren



Welche alternativen Formulierungen passen zu welcher Flohmarkt-Aufgabe? Finde weitere passende Formulierungen.

Passt nicht, weil der falsch herum ist. Man berechnet nämlich nicht mit dem Gewinn die Anzahl der Bücher, sondern – also andersherum, mit den Büchern der – den Gewinn.

Gezielte Kontrastierung von Variationen:

- Die Funktionsgleichung gibt **den Gewinn** in Abhängigkeit von **der Anzahl der verkauften Bücher** an.
- Die Funktionsgleichung gibt **die Anzahl der verkauften Bücher** in Abhängigkeit von **dem Gewinn** an.
- ...
- Mit der Funktionsgleichung kann ich in Abhängigkeit
- **vom Gewinn die Anzahl der verkauften Bücher** berechnen.
- Mit der Funktionsgleichung kann ich **den Gewinn** in Abhängigkeit von **der Anzahl der verkauften Bücher** berechnen.
- ...

Unabhängige Größe → Abhängige Größe

Zusammenhang fachliche Teilziele – Sprachhandlungen – Sprachmittel



Fachliches Teilziel

Sprachhandlung

Sprachmittel

Inhaltliches Denken:

Funktionale
Zusammenhänge
mathematisieren
und interpretieren

Erklären von Bedeutungen

Die Funktionsgleichung gibt an, wie der Gesamtpreis von der Anzahl der Monate abhängt. Wenn die Anzahl der Monate höher ist, ist auch der Gesamtpreis höher. x steht hier für die Anzahl der Monate, y steht für den Gesamtpreis, der von der Anzahl der Monate abhängt.

Am Graphen kann man ablesen, dass man nach zwei Monaten 45 € bezahlen muss.

Bedeutungsbezogene Sprachmittel

... hängt ab von ...

Es geht um den
Zusammenhang
von ... und ...

Der Graph /
die Tabelle zeigt,
wie ... von ... abhängt.

Anzahl Monate	Gesamtpreis

Formaler Kalkül:

Funktionswerte
berechnen

Erläutern eines Rechenwegs

Um x auszurechnen, muss die Funktionsgleichung nach x umgestellt werden. Dazu kann man auf beiden Seiten dieselbe Rechnung durchführen.

Am Graphen kann man ablesen, dass bei $x = 2$, $y = 45$ ist.

Formalbezogene Sprachmittel

Wenn für x ... ein-
gesetzt wird, ist y

Wenn für y ... ein-
gesetzt wird ..., ist x

Im Graphen/
in der Tabelle ist bei $x = \dots$, $y = \dots$

Anzahl Monate	Gesamtpreis

Bedeutungsbezogene Sprache anbieten



Sprachhandlung	Mögliche Satzbausteine
Beschreiben des allgemeinen Zusammenhangs	Wenn ... verändert wird, dann ändert sich auch Je ..., desto
Benennen der beteiligten Größen	Es geht um den Zusammenhang von ... und Es wird ... und ... in Beziehung gesetzt.
Erklären der Bedeutung von x und $f(x)$	Auf der x -Achse des Graphen (in der linken Spalte der Tabelle) ist ..., auf der y -Achse (in der rechten Spalte der Tabelle) ... notiert. Das x steht für ..., das $f(x)$ steht für
Beschreiben des lokalen Zusammenhangs von Größen mit Wertepaaren	Bei/ Für $x = \dots$ gilt $f(\dots) = \dots$. Das bedeutet, dass ...
Beschreiben der gemeinsamen Veränderung (Kovariation)	Wenn ..., dann steigt ... pro ... um Wenn ..., dann wächst/fällt ... um Zwischen ... und ... steigt/fällt der Graph schneller/langsamer als
Beschreiben des allgemeinen Zusammenhangs	Die Funktionsgleichung gibt ... in Abhängigkeit von ... an. Die Funktionsgleichung ordnet zu.

Bedeutungsbezogene Sprache anbieten



Was passiert, wenn Satzbausteine zu früh angeboten werden?

Stream24

Schauen Sie online so viele Filme aus unserem Bestand, wie Sie möchten, für einen Festpreis von nur 10 € im Monat! Diesen Vertrag können Sie jederzeit kündigen. Wenn Sie auch Filme kaufen möchten (d. h. auch offline bzw. auch noch nach Kündigung des Vertrags sehen) zahlen Sie hierfür zusätzlich nur jeweils 5 € pro Film!

Stelle eine Funktionsgleichung zu HelloStream auf und erkläre ihre Bedeutung. Nutze bei Bedarf folgende Satzbausteine:

Wenn ich ... kenne, kenne ich auch ...

Die Funktionsgleichung ordnet zu.

Preis pro gekauftem Film

Anzahl gekaufter Filme

X steht für die Größe

Gesamtpreis im Monat

$f(x)$ steht für die Größe ...

... ist abhängig von ...

Monatlicher Festpreis

Die Funktionsgleichung ordnet ^{der} ~~die~~ ~~den~~ ~~Monatlichen~~ Festpreis ~~f~~
Anzahl gekaufter Filme ^{den} Gesamtpreis zu.

Die Funktionsgleichung ordnet ^{der} Anzahl benötigter Fahrkarten ~~den~~ ~~den~~ ~~die~~
Gesamtkosten für den Ausflug zu.

Besser: erst mit sprachlichen Vorbildern arbeiten, um Sprachmittel mit Bedeutung zu füllen (z.B. durch Formulierungsvariation) und erst dann Satzbausteine anbieten, die diese Formulierungen aufgreifen.

David (15 Jahre, Erstsprache Deutsch, Schüler eines Gymnasiums)

Sprachspeicher anlegen



Beispiel:

Sprachspeicher am Ende
der Unterrichtseinheit
lineare Funktionen



Sprachspeicher: Lineare funktionale Zusammenhänge

Was sind funktionale Zusammenhänge?

Einen funktionalen Zusammenhang kann man so beschreiben:

Wenn sich die 1. (*unabhängige*) Größe verändert,
dann verändert sich auch die 2. (*abhängige*) Größe.

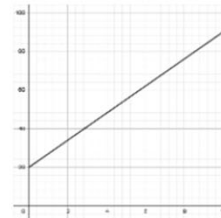
Die 2. Größe *hängt* also von der ersten Größe *ab*.

Für den funktionalen Zusammenhang unten bedeutet das zum Beispiel:

Funktion in Tabelle

Anzahl der Monate	Gesamtpreis
0	20
1	27
2	34
3	41
4	48

im Graphen



in der Funktionsgleichung

$$f(x) = 7x + 20$$

x steht für _____.

f(x) steht für _____.

und hängt von _____ ab.

f(3) bedeutet _____.

So kann man Funktionswerte in verschiedenen Darstellungen ablesen:

Nach _____ Monaten beträgt der Gesamtpreis 34 €.

Nach 4 Monaten beträgt der Gesamtpreis _____ €.

Was sind lineare funktionale Zusammenhänge?

Lineare Eigenschaften beschreiben:

- **Einmalig** muss man 20 € bezahlen, d.h. der **Startwert** ist 20.
- **Pro** Monat kommen 7 € hinzu, d.h. die **Steigung** oder **Änderungsrate** ist 7.

Eine Funktion heißt linear, wenn die Steigung konstant ist.

So prüft man in der Tabelle, ob die Funktion linear ist:

Gliederung

1. Einstieg

2. **Verstehensgrundlagen von funktionalen Zusammenhängen**



Worauf kommt es an?



Wie diagnostizieren wir sie?



Wie fördern wir sie? Fach- und Sprachintegriert!



Wie fördern wir sie? Darstellungsvernetzung!

3. Förderbausteine zu Verstehensgrundlagen

4. Zusammenfassung und Ausblick

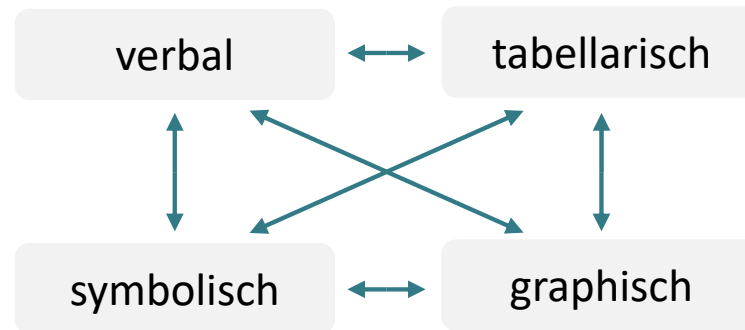
Verschiedene Darstellungen



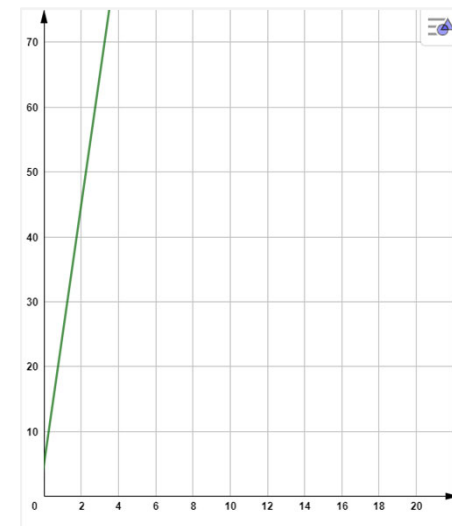
DreamStream

Bei uns in der Online Videothek DreamStream können Sie eine Film-Flat für nur 20 € im Monat buchen. Dafür kann man sich im Monat so viele Filme ausleihen, wie man möchte. Für die Anmeldung muss zusätzlich einmalig 5 € bezahlt werden.

Anzahl Monate	Gesamtpreis



$$f(x) = 20x + 5$$



Eine Vielzahl von Darstellungswechseln ...



1) symbolisch → verbal

2) symbolisch → tabellarisch

3) symbolisch → graphisch

4) verbal → tabellarisch

5) verbal → graphisch

6) verbal → symbolisch

7) graphisch → verbal

8) graphisch → tabellarisch

9) graphisch → symbolisch

10) tabellarisch → verbal

11) tabellarisch → graphisch

12) tabellarisch → symbolisch

Chat:

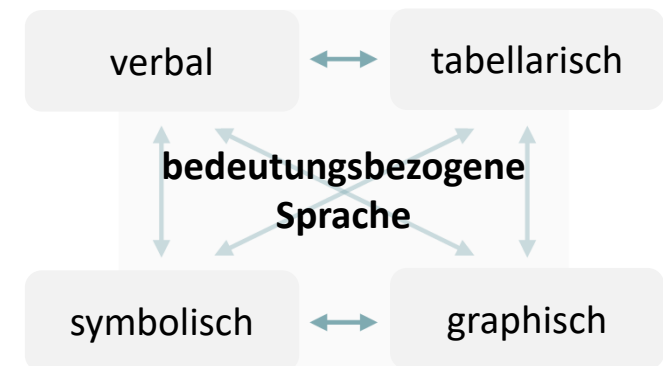
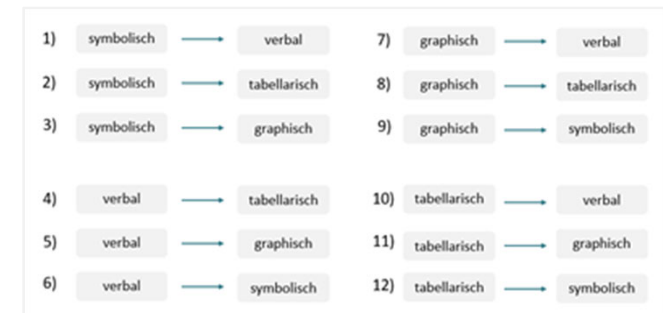
Welche Darstellungswechsel spielen in Ihrem Unterricht (etwa zu linearen Funktionen) eine (prominente/durchgängige) Rolle?

Schreiben Sie die entsprechenden Nummern in den Chat.

Nicht nur Wechsel sondern Vernetzung



- nicht: (mechanischer) Wechsel zwischen Darstellungen
- nicht: sukzessives Voranschreiten bis hin zur formalen Darstellung (Funktionsgleichung)
- ... sondern:
Zentral ist die kontinuierliche und vielfältige **Vernetzung** der verschiedenen Darstellungen, um eine Verstehen zu erreichen!



Um die Darstellungen zu **vernetzen**, müssen wir zunächst über die **Verstehensgrundlagen in einer Darstellung sprechen**. Dafür benötigen wir entsprechende (**bedeutungsbezogene Sprachmittel**). Auf dieser Basis können wir dann die **Vernetzung zu einer weiteren Darstellung** angehen, in der wir die **Verbindungen** zwischen den beiden Darstellungen **explizieren**.

Verschiedene Darstellungen – Verschiedene Sprachmittel!



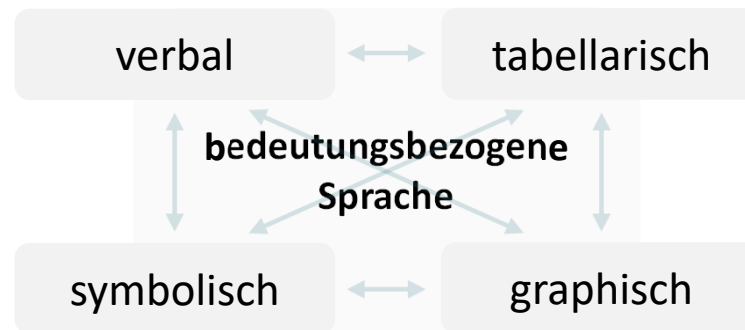
DreamStream

Bei uns in der Online Videothek DreamStream können Sie eine Film-Flat für nur 20 € im Monat buchen ...

Anzahl Monate	Gesamtpreis

Wenn man DreamStream drei Monate bucht, dann ...

Nach drei Monaten zahlt man bei DreamStream ... €.



Im Übergang von einer Zeile in die nächste ...

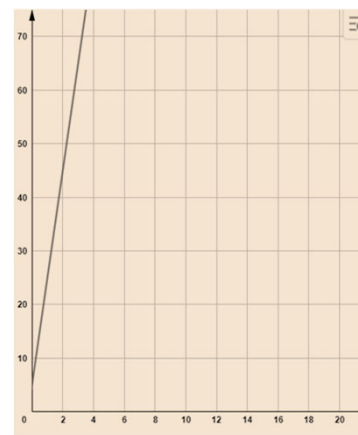
In der rechten Spalte ...

Die Funktionsgleichung ordnet zu.

Die Funktionsgleichung gibt für jede(n/s) an.

Die Funktionsgleichung gibt ... in Abhängigkeit von ... an.

$$f(x) = 20x + 5$$



Der Graph verläuft flacher/ steiler ...

Der Y-Achsenabschnitt liegt bei...

Die Änderungsrate / Steigung beträgt...

Gliederung

1. Einstieg
2. Verstehensgrundlagen von funktionalen Zusammenhängen
- 3. Förderbausteine zu Verstehensgrundlagen**
4. Zusammenfassung und Ausblick

Baustein: Funktionale Zusammenhänge erkennen und beschreiben



Darstellungsvernetzung: verbal - tabellarisch

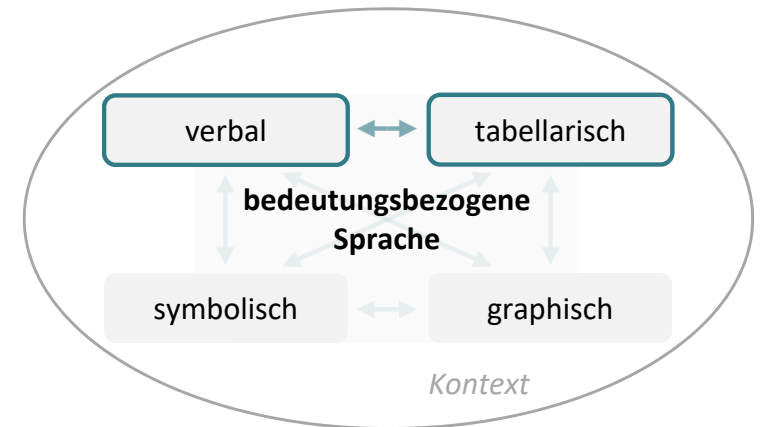
Die Tabelle rechts gehört zu einem Streaming-Dienst. Beschreibe, was man an der Tabelle alles ablesen kann. Du kannst dafür folgende Satzbausteine benutzen:

Nach ... Monaten beträgt der Gesamtpreis ... €.

Der Gesamtpreis hängt davon ab, ...

Pro Monat zahlt man ...

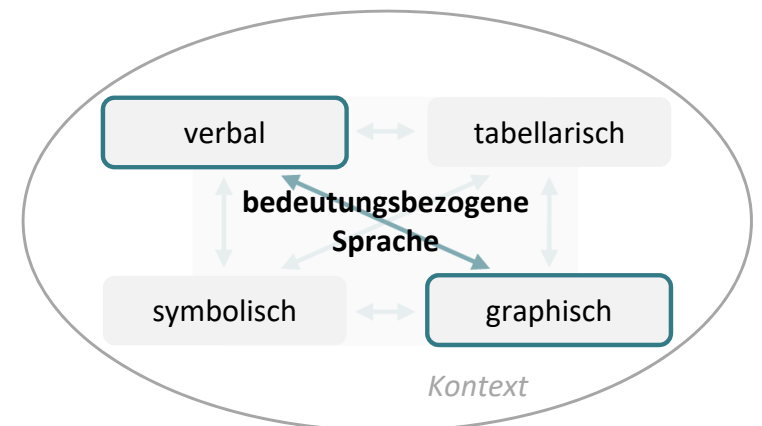
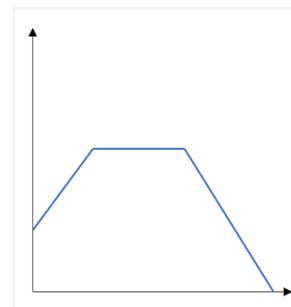
Einmalig zahlt man ...



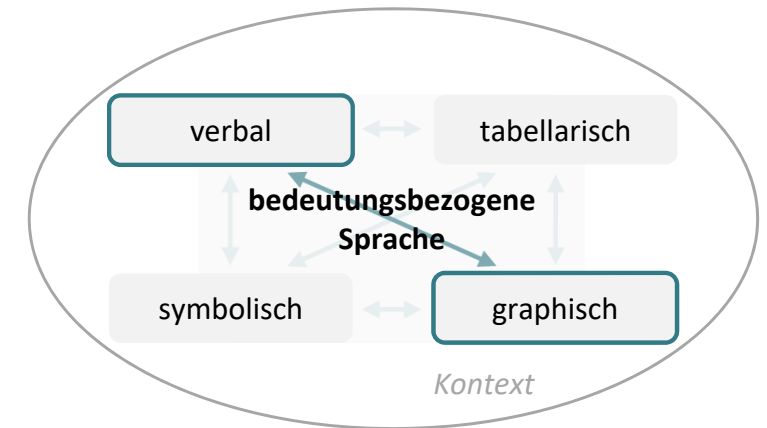
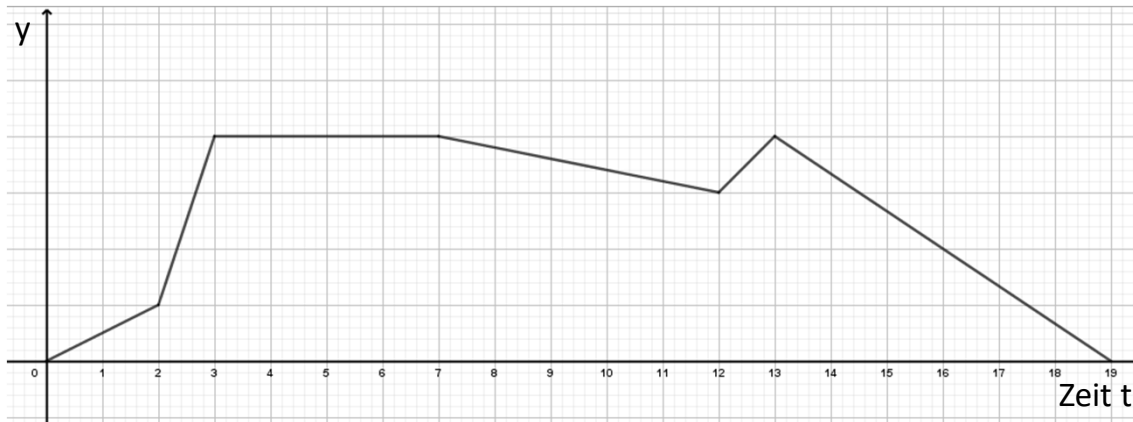
Anzahl der Monate	Gesamtpreis
0	10
1	17
2	24
3	
4	38

Darstellungsvernetzung: verbal - graphisch

Denke dir zwei Situationen aus, die jeweils zu dem Graphen passen. Beschreibe, welcher Zusammenhang dargestellt wird und deute den Verlauf des Graphen für die jeweilige Situation.



Vertiefende Aufgabenvariante: Graphen interpretieren und darstellen



Variante a – Graph gegeben:

Findet einen funktionalen Zusammenhang in eurer Umwelt, der zu dem Verlauf des Graphen passt. Bereitet euch darauf vor, das Experiment der Klasse vorzuführen.

Variante b – keine Graphen gegeben:

Sucht euch selbst ein Experiment aus, das einen funktionalen Zusammenhang beschreibt. Ihr sollt gleich euer Experiment vorführen und eure MitschülerInnen sollen parallel den zugehörigen Graphen zeichnen.

Chat:

Mit welchen Experimenten könnten Schülerinnen und Schüler diese Aufgabe umsetzen?

Baustein: Lineare funktionale Zusammenhänge



Darstellungsvernetzung: verbal - tabellarisch

StreamFürAlle

Nach einer Anmeldegebühr von 13 € zahlen Sie für unser gesamtes Streaming Angebot nur 7 € pro Monat.

Um sich einen ersten Überblick darüber zu verschaffen, wieviel man für das Angebot bezahlen muss, stellt Leonie eine Tabelle auf.

Ergänze die Tabelle und beschrifte die Pfeile!

	Gesamtpreis (Euro)	Anzahl der Monate	
+ <input type="checkbox"/>		0	+ <input type="checkbox"/>
+ <input type="checkbox"/>	20		+ <input type="checkbox"/>
		2	
+ <input type="checkbox"/>	34		+ <input type="checkbox"/>

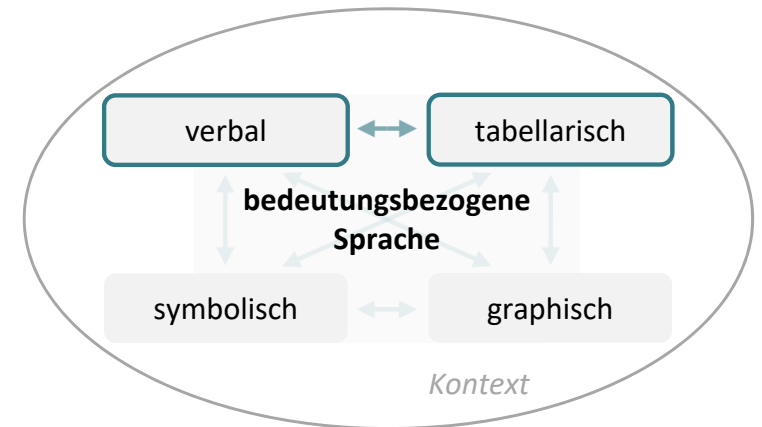
Erkläre, was die Wertepaare in der ersten und letzten Tabellenzeile bedeuten.

Nutze z.B. diese Satzbausteine:

Die Tabelle zeigt, wie ... von ... abhängt.

Nach ... muss man insgesamt ... bezahlen.

Wenn noch kein Monat vergangen ist,



Sicherstellung der Verstehensgrundlagen

- Identifizieren der beiden beteiligten Größen
- Erkennen der funktionalen Abhängigkeit
- Inhaltliche Deutung von Wertepaaren

Grundvorstellungen

- Zuordnungsaspekt
- Kovariationsaspekt (hier noch vorbereitend)
- Funktion als Ganzes

Baustein: Lineare funktionale Zusammenhänge



Erarbeitung der Funktionsgleichung

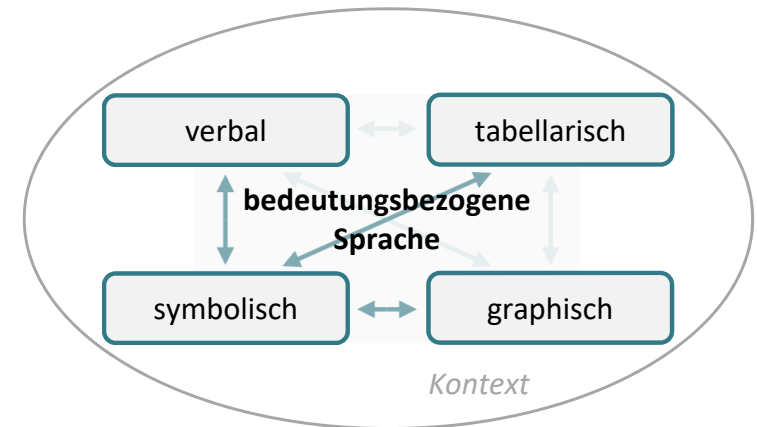
StreamFürAlle

Nach einer Anmeldegebühr von 13 € zahlen Sie für unser gesamtes Streaming Angebot nur 7 € pro Monat.

Was ist denn der Gesamtpreis nach 24 Monaten?



- d) Schreibe eine Anleitung auf, wie du den Gesamtpreis nach einer beliebigen Anzahl an Monaten erhalten kannst.
- e) Stelle deine Anleitung mit Hilfe einer Gleichung dar. Verwende hierbei die unabhängige Variable x für die Anzahl der Monate und die abhängige Variable $f(x)$ für den Gesamtpreis, den man nach x Monaten bezahlen muss.



Grundvorstellungen

- Zuordnungsaspekt
- Kovariationsaspekt (hier noch vorbereitend)
- Funktion als Ganzes



Chat:

Warum überhaupt eine Überführung in eine symbolische Darstellung?
Worin liegt der Mehrwert in der symbolischen Darstellung?

- Herausstellung bzw. **Darstellung des allgemeinen Zusammenhangs** der beteiligten (variablen) Größen
- Mithilfe der Formel kann man zu jedem Wert der ersten Größe den zugehörigen Wert der zweiten Größe schnell und effizient berechnen
- Man kann Zusammenhänge (mit mathematischen Mitteln) **untersuchen und begründen**
- Man kann Fragestellungen beantworten und **Probleme lösen**
- Man kann allgemeine Einsichten über die Zusammenhänge erlangen und herausstellen (,effizientes' Mittel zur **Kommunikation**)
- ...

Zwischenfazit 2



StreamFürAlle

Nach einer Anmeldegebühr von 13 € zahlen Sie für unser gesamtes Streaming Angebot nur 7 € pro Monat.

Was ist denn der Gesamtpreis nach 24 Monaten?



Tim

- d) Schreibe eine Anleitung auf, wie du den Gesamtpreis nach einer beliebigen Anzahl an Monaten erhalten kannst.
- e) Stelle deine Anleitung mit Hilfe einer Gleichung dar. Verwende hierbei die unabhängige Variable x für die Anzahl der Monate und die abhängige Variable $f(x)$ für den Gesamtpreis, den man nach x Monaten bezahlen muss.
- f) Erkläre, was die Funktionsgleichung angibt und was du nun mit ihr berechnen kannst!

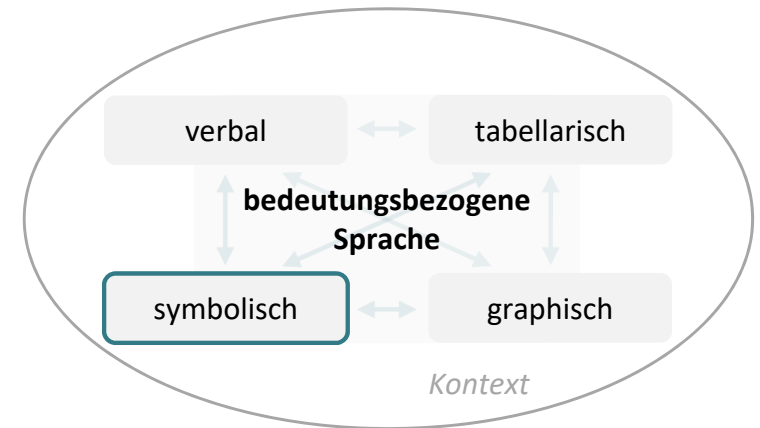


Nutze z.B. diese Satzbausteine:

Die Funktionsgleichung gibt ...in Abhängigkeit von ... an.

Mit der Funktionsgleichung kann ich ... in Abhängigkeit von ... berechnen.

Überprüfe, ob deine Funktionsgleichung richtig ist.
Setze dazu einige Wertepaare ein, die du schon kennst!



Verstehensgrundlagen klären,
bevor (mechanische) Übersetzung stattfindet und losgerechnet wird.

Baustein: Quadratische funktionale Zusammenhänge



Fokus jetzt: Erarbeitung der Charakteristika des Funktionentyps

Charakteristika von quadratischen Zusammenhängen

- nicht-konstante Steigung (in Abgrenzung zu linearen Funktionen)
- Symmetrie der Wertepaare (hier noch vorbereitend)
- Charakteristischer Zusammenhang der Wertepaare
Eine Ver- r -fachung des Arguments bewirkt stets eine Ver- r^2 -fachung des Funktionswerts.

Übergreifende Kontext des Bausteins:

Tim macht eine Ausbildung bei der Polizei. In der Polizeischule wird gerade darüber gesprochen, wie man anhand der Geschwindigkeit eines Autos die Länge des Bremsweges bestimmen kann. Um einfach ausrechnen zu können, wie schnell eine Person gefahren ist oder wie lang der Bremsweg wird, nutzt die Polizei die Formel: $b(x) = x^2/100$.



Fokus: nicht-konstante Steigung (in Abgrenzung zu linearen Funktionen und Vorbereitung der charakteristischen Kovariation)



Bereits vorbereitend durch ungefähres Schätzen/Ablesen der Ausgangsgeschwindigkeit bei gegebenem Bremsweg mithilfe der Tabelle und des Graphen:



3. Bei einem Unfall hat Herr Krug eine Fahrradfahrerin angefahren. Auf der Straße ist eine Bremsspur von 18 Metern zu sehen. Polizistin Daube und ihr Azubi Tim sollen nun prüfen, wie schnell Herr Krug gefahren ist und ob er sich an das Tempolimit von 30 km/h gehalten hat.

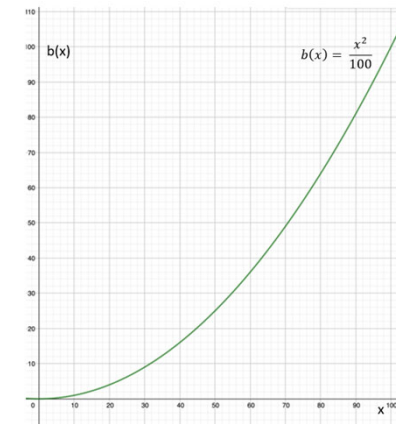
- a) Nutzt die Tabelle aus 2, um die Geschwindigkeit zu schätzen:

Herr Krug ist ca. _____ km/h gefahren.

- b) Tim hat die Idee den Wert stattdessen aus dem Graphen im Polizei- Handbuch abzulesen, um Zeit zu sparen. Findet durch **Ablesen am Graphen** die ungefähre Geschwindigkeit heraus, die Herr Krug gefahren ist und korrigiert (wenn nötig) den Wert aus 3a).

Herr Krug ist ca. _____ km/h gefahren.

Geschwindigkeit: x	Bremsweg: b(x)
30	9
40	16
50	25
70	49



Dann fokussierte Betrachtung durch Argumentationsanlass:

5. Währenddessen ermahnt Kommissarin Daube Herr Krug: „Da haben Sie aber Glück gehabt, dass sie bei einem Tempolimit von 30 km/h zu schnell gefahren sind und nicht bei 70 km/h. Das wäre deutlich schlimmer geendet.“ Herr Krug ist skeptisch: „Für die Länge des Bremsweges ist es doch egal bei welcher Geschwindigkeit ich 12km/h zu schnell fahre!“



Was würdet ihr Herrn Krug antworten? **Diskutiert** zu zweit.

Beantwortet einmal mit Hilfe der Tabelle und einmal anhand des Graphen.

Notiert eure Antwort.

Symmetrie der Wertepaare (hier noch vorbereitend)



Tims Taschenrechner zeigt als Ergebnis: $x_1 \approx 42,43$ und $x_2 \approx -42,43$ an.
Warum gibt es zwei Lösungen für die Gleichung $x^2 = 1800$?
Welche davon hilft den Fall zu lösen?

Zwei Lösungen weil der Graph eine Parabel ist und an der y-Achse gespiegelt ist.
 x_1 ist der korrekte Wert, weil man nicht rückwärts fahren und einen Fahrradfahrer nach vorne schleudern kann (beim Unfall)

Jonas

- beim Wurzelziehen entstehen immer 2 Lösungen
einmal positiv und einmal negativ

Stephanie

ES gibt zwei Lösungen, weil man aus der Wurzel immer einen negativen und einen positiven Wert gibt. Bzw. wenn man mit „sich selbst“ multipliziert kommt bei beiden Lösungen 1800 raus. Nur das positive Ergebnis ergibt Sinn, da man keine negative Geschwindigkeit haben kann.

Julia

Charakteristische Zusammenhang der Wertepaare (Kovariation):



... Nun will Azubi Tim es aber genau wissen! Wie verändert sich der Bremsweg genau?

x	f(x)
0	0
5	0,25
10	1
15	2,25
20	4
25	6,25
30	9
35	12,25
40	16
45	20,25
50	25
55	30,25
60	36
65	42,25
70	49

- 1) Untersuche die Tabelle! Wie ändert sich der Funktionswert, wenn sich der x-Wert verdoppelt/verdreifacht/ vervierfacht/... ?
Notiere deine Überlegungen und Beispiele:

- 2) Trage deine Vermutung hier ein:

Wenn sich der x-Wert verdoppelt, dann _____
sich der Funktionswert.

Wenn sich der x-Wert verdreifacht, dann _____
sich der Funktionswert.

Wenn sich der x-Wert vervierfacht, dann _____
sich der Funktionswert.

Wenn sich der x-Wert _____ , dann _____
sich der Funktionswert.

- 3) Begründe deine Vermutung mithilfe

der Formel: $b(x) = \frac{x^2}{100}$

Charakteristische Zusammenhang der Wertepaare (Kovariation):



... Nun will Azubi Tim es aber genau wissen! Wie verändert sich der Bremsweg genau?

x-Wert	F.-Wert
Geschwindigkeit: x	Bremsweg: b(x)
0	0
5	0,25
10	1
15	2,25
20	4
25	6,25
30	9
35	12,15
40	16
45	20,25
50	25
55	30,25
60	36
65	42,35
70	49

Handwritten notes on the right side of the table indicate the change in the function value (F.-Wert) for each step of 5 in the x-value (x-Wert):

- 0 to 5: +0,25
- 5 to 10: +0,75
- 10 to 15: +1,25
- 15 to 20: +1,75
- 20 to 25: +2,25
- 25 to 30: +2,75
- 30 to 35: +3,25
- 35 to 40: +3,75
- 40 to 45: +4,25
- 45 to 50: +4,75
- 50 to 55: +5,25
- 55 to 60: +5,75
- 60 to 65: +6,25
- 65 to 70: +6,75

Man erkennt ein Muster

Julius

Trage deine Vermutung hier ein:

Wenn sich der x-Wert verdoppelt, dann + 0,75 der Funktionswert.

Wenn sich der x-Wert verdreifacht, dann + 1,75 der Funktionswert.

Wenn sich der x-Wert vervierfacht, dann + 2,75 der Funktionswert.

Wenn sich der x-Wert verfünffacht, dann + 3,75 der Funktionswert.

1- bei verdoppeltem x = vervierfachter Bremsweg
 2- bei verdreifachtem x = verneunfachter Bremsweg
 3- bei vervierfachtem x = versechszehnfachter Bremsweg

Nina

Gliederung

1. Einstieg
2. Verstehensgrundlagen von funktionalen Zusammenhängen
3. Förderbausteine zu Verstehensgrundlagen
4. **Zusammenfassung und Ausblick**

Treffsichere Förderung zum Verstehen funktionaler Zusammenhänge



Verstehensgrundlagen
identifizieren



Verstehensgrundlagen
diagnostizieren



Verstehensgrundlagen
fördern

Lineare Funktionen verstehen 2

A Lineare funktionale Zusammenhänge verstehen

1. Einen linearen funktionalen Zusammenhang mit einer Tabelle erkunden

StreamFürAlle
Nach einer Anreizgebühr von 34 € zahlen Sie für unser gesamtes Streaming-Angebot nur 16 € pro Monat.

a) Welchen Gesamtpreis muss man bei dem Angebot von StreamFürAlle zu Beginn, nach einem, zwei und drei Monaten bezahlen? Fülle die Tabelle aus und beschreibe, wie du dabei vorgehst!

Erkläre, was die Wertepaare in der ersten und letzten Tabellenzeile bedeuten.

2. Einen linearen funktionalen Zusammenhang mit einem Graphen erkunden

a) Stelle die Wertepaare aus der Tabelle in 1a) in dem untenstehenden Koordinatensystem dar.

b) Bestimme im Koordinatensystem den Gesamtpreis nach 6 Monaten. Beschreibe dein Vorgehen.

Beteiligte Größen und Richtung der
Abhängigkeit erkennen

Grundvorstellungen

Darstellungsvernetzung

Bedeutungsbezogene Sprache

Charakteristika der Funktionstypen



„Funktionale Zusammenhänge verstehen“ – Daran arbeiten wir:

Diagnose- und Förderbausteine:

- (1) Funktionale Zusammenhänge erkennen und beschreiben
- (2) Lineare funktionale Zusammenhänge
- (3) Quadratische funktionale Zusammenhänge
- (4) Textaufgaben lesen und bearbeiten (September 2022)

Dazu: Erklärvideos, Handreichungsvideos, Apps, digitale Diagnosen



Liste von Lehr-/Lernmaterialien zur Thematik Funktionen

Unterrichtsmaterialien Sekundarstufe: sima.dzlm.de/um/9-001

[jeweils Unterrichtsmaterial als PDF/Word und didaktische Kommentare]

- Funktionale Zusammenhänge am Sprachanfang (ab Kl. 7)
- Wiederholung zu linearen Funktionen (Kl. 9 bis 11)

Unterrichtsmaterialien Berufskolleg: <https://sima.dzlm.de/unterrichtsmaterialien-berufskolleg>

[jeweils Unterrichtsmaterial als PDF/Word, didaktische Kommentare und weiterführende Aktivitäten]

- Proportionalität für den Beruf
- Tabellen und Diagramme für den Beruf
- Funktionsgraphen und funktionale Zusammenhänge
- Kernaktivitäten zu berufsbezogenen Anwendung der Proportionalität, Prozente, Tabellen und Graphen in reichhaltigen Kommunikationssituationen

Materialien und Ideen zur Handlungsorientierung:

- Der MUED-Mathekoffer „Funktionen“: <https://www.mathekoffer.de/>
- Skript „Algebra und Analysis als Abenteuer – Eine handlungs- und erlebnisorientierte Vorlesung“ [\[LINK\]](#)
- Roth, J. (2014). Experimentieren mit realen Objekten, Videos & Simulationen – Ein schülerzentrierter Zugang zum Funktionsbegriff. *MU*, 60(6), S. 37-43. [\[LINK\]](#)

Diagnose rund um Funktionen

- CODI – Test: Diagnoseinstrument zur Thematik lineare und quadratische Funktionen. Als Werkzeug für Lehrkräfte für eine Diagnose der Klasse gedacht. <http://codi-test.de/>
- FALKE-Test: Funktionales Denken und Analysis: <https://www.falke-test.de>
Falke-Test1 zum Ende der Sekundarstufe
Falke-Test2 zum Ende der Einführungsphase

Gerade zum Aufholen von Lernzeit müssen wir den Kampf gegen Oberflächlichkeit gewinnen

vieles in den Regelunterricht einbauen

Förderunterricht für mehr Lernende etablieren

Förderunterricht nächstes Schuljahr fortsetzen

Flächendeckend diagnostizieren

Haben Sie noch Fragen?

Gerne in die Fragensammlung im Padlet oder jetzt direkt im Anschluss.



-  Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit
-  Verstehensorientierung
-  Diagnosegeleitetheit
-  Kommunikationsförderung

Zitierte Literatur

- Malle, G. (1993). Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Wiesbaden: Vieweg & Sohn.
- Prediger, S., Renk, N., Büchter, A., Gürsoy, E., Benholz, C. (2013). Family background or language disadvantages? Factors for underachievement in high stakes tests. In A. Lindmeier & A. Heinze (Hrsg.), Proceedings of the 37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4. Kiel, Germany: PME, 4.49-4.56.
- Prediger, S. (Hrsg.) (2020). Sprachbildender Mathematikunterricht in der Sekundarstufe - ein forschungsbasiertes Praxisbuch. Berlin: Cornelsen.
- Vollrath, H.-J. (1989). Algebra in der Sekundarstufe. Wiesbaden: Springer.
- Zindel, C., Brauner, U., Jungel, C., & Hoffmann, M. (2018). Um welche Größen gehts? Die Sprache funktionaler Zusammenhänge verstehen und nutzen. Mathematik lehren, 206, 23–28.
- Zindel, C. (2019). Den Kern des Funktionsbegriffs verstehen - Eine Entwicklungsforschungsstudie zur fach- und sprachintegrierten Förderung. Wiesbaden: Springer.
- Zindel, C., & Prediger, S. (2020). „Rückblick auf lineare Funktionen“. [\[LINK\]](#)
- ZP10 NRW (2012). Ministerium für Schule und Weiterbildung: Zentrale Abschlussprüfung 10 Mathematik für den Mittleren Schulabschluss. Düsseldorf: MSW.