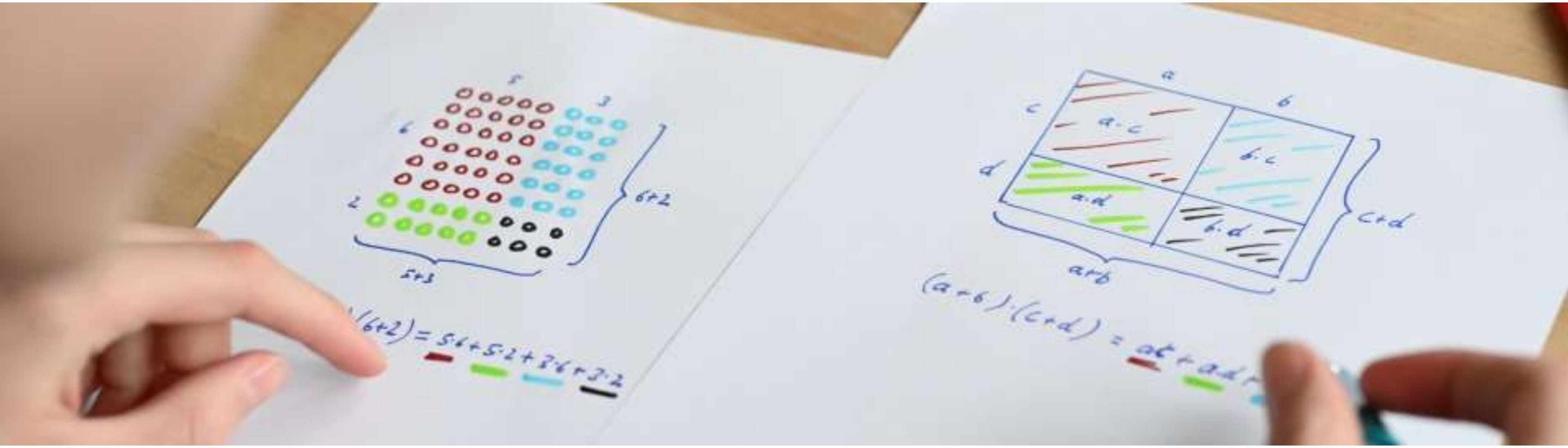
DZLM Deutsches Zentrum für Lehrerbildung Mathematik

Leibniz Gemeinschaft

IPN Leibniz-Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften und Mathematik



Algebra – Eine Reise durch die Jahrgänge

Tobias Domokos, Anika Dreher, Lars Holzäpfel, Macarena Larrain, Lukas Weith – PH Freiburg

Bärbel Barzel, Katrin Klingbeil, Fabian Rösken – Uni Duisburg-Essen

Marita Friesen – PH Heidelberg

MaCo

Technisches zu unserem Online-Seminar heute

So geht passive Beteiligung:

- Heute im Livestream (ohne Zoom): https://dzlm.de/livestream
- Aufzeichnung der Veranstaltung und weitere Angebote auf https://maco.dzlm.de/

So geht aktive Beteiligung heute:

Für alle (auch Livestream-Nutzende) mit dem Padlet

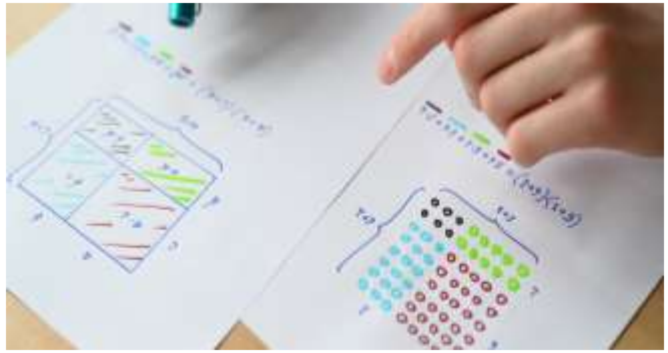
- Denkaufträge und Material

Für Zoom-Nutzende zusätzlich

- Zoom-Chat für Austausch unter Teilnehmenden und Diskussionen

Seminar-Padlet für 21.06.2022
https://padlet.com/maco_algebra/trmr3lf1dnqu42s3
Brauchen wir öfters

Algebra – Variable, Terme und Gleichungen



$x + 8 = 12$

$12x^2 - 4x + 8 = 2$

$x + y = y + x$

$U = 2\,\pi\,r$

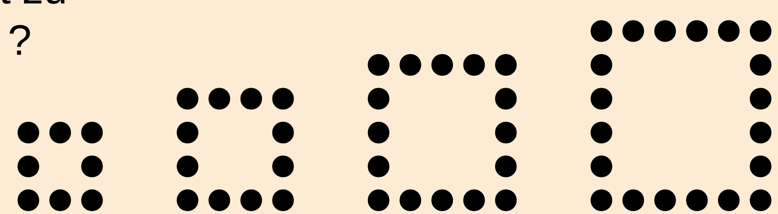
$4\,(x-2) = 4x - 8$

Allgemein beschreiben

a) Wie viele Punkte siehst du in den einzelnen Figuren?

b) Wie hast du gezählt? Zeichne ein, wie du gezählt hast.

c) Gibt es noch andere Möglichkeiten, die Punkte geschickt zu zählen ?



8 **12** **16** **?**

(Bilder: Lars Holzäpfel)

„Jede mathematische Formel in einem Buch halbiert die Verkaufszahl dieses Buches.“

Stephen Hawking

Algebra nimmt einen großen Anteil des Unterrichts ab Klasse 7 ein.

„Abstrakte Symbole, die nicht durch die eigene Aktivität des Kindes mit Sinn gefüllt, sondern ihm von außen aufgeprägt werden, sind tote und nutzlose Symbole.

Sie verwandeln den Lehrstoff in Hieroglyphen, die etwas bedeuten könnten, wenn man nur den Schlüssel dazu hätte.

Da aber der Schlüssel fehlt, ist der Stoff eine tote Last.“

(John Dewey, 1859–1953)

„Bei den Römern war die Algebra noch einfach. Da kam für X immer 10 raus!“

Abfrage im Padlet (Aktivität 1)

Welche Probleme hat Ihre Klasse in Algebra?
Benennen Sie diese kurz (!) und geben Sie wenn möglich die Jahrgangsstufe an.

Seminar-Padlet für 21.06.2022
https://padlet.com/maco_algebra/trmr3lf1dnqu42s3
Brauchen wir öfters

Gliederung

1. Einstieg
2. Variablen verstehen und nutzen
3. Terme verstehen, aufstellen und nutzen
4. Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen
5. Ausblick

Algebra – das Wichtigste im Überblick

Jobs der Lehrkräfte

Verstehensgrundlagen identifizieren

Was sind die wichtigsten Inhalte und Vorstellungen für Lernende?

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

Wie findet man heraus, was davon die Lernenden gut verstehen und wo es Probleme gibt?

Verstehensgrundlagen fördern

Wie lässt sich das nötige Verständnis aufbauen?

Was bedeutet das für die Erarbeitung der Algebra?

Prinzipien für nachhaltiges Lernen

- Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit
- Verstehensorientierung
- Diagnosegeleitetheit
- Kommunikationsförderung

Algebra: Herausforderungen und Schwierigkeiten

Beispiel

Interview mit einer 14-jährigen Schülerin (Gymnasium)

Vl: (legt folgende Aufgabe vor)
$3ab + 5ab = \ldots$

Vp: (schreibt) $3ab + 5ab = 8a^2b^2$

Vl: Wie hast du das ausgerechnet?

Vp: Ja, $3 + 5 = 8$ und $a \cdot a = a^2$ und …

Vl: Warum rechnest du 3 plus 5, aber a mal a?

Vp: Ja, weil hier (zeigt zwischen 5 und a) ein mal steht.

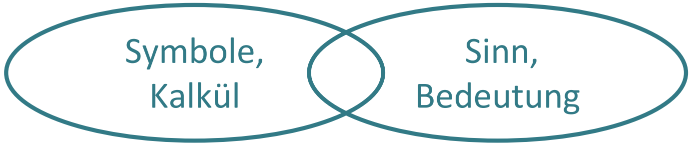
Vl: Das verstehe ich nicht.

Vp: (Nach längeren erfolglosen Bemühungen des Versuchsleiters erklärt das Mädchen schließlich) Wenn ich $3 + 5 = 8$ ausrechne, dann ist ja das Plus verschwunden und es bleibt 8abab übrig und das ist ja $8a^2b^2$.

(Malle 1986)

Problem

- Variable, Terme und Gleichungen werden als abstrakte mathematische Gegenstände gesehen, mit denen man mathematisch nach bestimmten Regeln operiert.
- Die Regeln erscheinen beliebig.
- Terme / Variable haben keine inhaltliche Bedeutung



Hilfreich: Alltags- und geometrische Situationen mit Termen beschreiben

Ziel: nicht nur auf Kalkülregeln reduzieren, sondern verstehensorientiert arbeiten

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

(Fischer, Hefendehl-Hebeker & Prediger 2010)

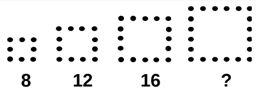
Algebra – eine Reise durch die Jahrgänge

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

5

Variable
Allgemeine Zahl



6

Terme
Rechenausdruck

Variable
Allgemeine Zahl
Veränderliche
Unbekannte

Terme
Einsetzungsgleichheit

7

Terme
Beschreibungsgleichheit

Variable
Veränderliche

Funktion
Zuordnung, Kovariation

8

Variable
Unbekannte

Terme
Umformungsgleichheit

Gleichungen
aufstellen & lösen

Ab Kl. 5 werden Sachverhalte/Bilder mit Zahltermen beschrieben. Das kann man nutzen um Grundvorstellungen zu Variablen aufzubauen!

Gliederung

1. Einstieg
2. Variablen verstehen und nutzen
3. Terme verstehen, aufstellen und nutzen
4. Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen
5. Ausblick

Übung zum Einstieg

Bitte beachten Sie:
Für die Beantwortung der folgenden Frage im Chat haben Sie 30 s Zeit.

Drücken Sie die folgende Situation als Gleichung mit den Variablen P und S aus (schriftlich notieren):

„An einer Universität sind P Professoren und S Studenten.
Auf einen Professor kommen 6 Studenten.“

Variablenverständnis – Typische Schwierigkeiten

Interviewer (legt folgende Aufgabe vor):

An einer Universität sind **P** Professoren und **S** Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten.

Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus!

Ch: (schreibt) 6S = P
I: Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren.
Wie viele Studenten sind es dann?
Ch: 60.
I: Setzen Sie das in die Gleichung ein!
Ch: 6 · 60 = 10. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) P + 6S = P + S.
I: Was bedeutet das?
Ch: Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten.
I: Hhmm ... Bei dieser Gleichung könnte man auf beiden Seiten P subtrahieren.
Was ergibt sich dann?
Ch; (streicht P auf beiden Seiten durch) 6S = S.
I: Kann das stimmen?
Ch: Ja natürlich ... die Gruppen zu 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten.
I: Setzen Sie wieder die Zahlen ein!
Ch: 10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das 6 · 60 = 10.
Das kann nicht stimmen.
(Nach einer Pause schreibt sie) P + S = 7.
I: (räuspert sich)
Ch: (bessert aus zu) P + 6S = 7
I: Was bedeutet das?
Ch: Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

Murmelphase

- Welche Fehlvorstellung liegt vor?
- Was muss gefördert werden?

(Malle 1993)

Variablenverständnis – Ein typischer Fehler

Umkehrfehler	Ch:	(schreibt) 6S = P
	I:	Nehmen wir einmal an, es sind 10 Professoren. Wie viele Studenten sind es dann?
Beispiel wird richtig gerechnet. Umkehrfehler findet auf der symbolisch-semantischen Ebene statt	Ch:	60.
	I:	Setzen Sie das in die Gleichung ein!
Es wurde verstanden, dass man für Variablen Zahlen einsetzen kann.	Ch:	6 · 60 = 10. Aha, das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) P + 6S = P + S.
	I:	Was bedeutet das?
Fehler im Variablenverständnis (S kann nicht 2 Werte annehmen)	Ch:	Die Professoren und die auf jeden Professor fallenden 6 Studenten ergeben zusammen alle Professoren und Studenten.
	I:	Hhmm ... Bei dieser Gleichung könnte man auf beiden Seiten P subtrahieren. Was ergibt sich dann?
Fehler im Variablenverständnis (S kann nicht 2 Werte annehmen)	Ch:	(streicht P auf beiden Seiten durch) 6S = S.
	I:	Kann das stimmen?
	Ch:	Ja natürlich ... die Gruppen zu 6 Studenten ergeben zusammen alle Studenten.
	I:	Setzen Sie wieder die Zahlen ein!
Es wurde verstanden, dass man für Variablen Zahlen einsetzen kann.	Ch:	10 Professoren und 60 Studenten. Dann ist das 6 · 60 = 10. Das kann nicht stimmen. (Nach einer Pause schreibt sie) P + S = 7.
	I:	(räuspert sich)
Ursprüngliche Aufgabe wird nicht mehr beachtet. Durch diesen Term wird keine Beziehung zischen Professoren und Studenten ausgedrückt	Ch:	(bessert aus zu) P + 6S = 7
	I:	Was bedeutet das?
	Ch:	Ein Professor und seine 6 Studenten sind zusammen 7 Personen.

Andere mögliche Ursache:
Für Ch steht Variable für ein Objekt und nicht für eine Zahl

(Malle 1993)

Unterstützung bei der Diagnose von Fehlvorstellungen

- SMART ist ein Projekt der University of Melbourne (Leitung: Kaye Stacey)
- seit 12 Jahren
- Analyse von mehr als 500 000 Lernendendaten
- für alle Inhaltsbereiche der Klassen 5–9 in über 130 Smart-Tests

smart
specific mathematics assessments that reveal thinking

Über 130 verstehensorientierte Tests (5–10 Min) zur individuellen, verstehensorientierten Diagnose und Förderung mit:

individuellen Verstehensstufen, Fehlvorstellungen und Förderhinweisen

Zahlen und Operationen

Raum und Form

Algebra

Daten und Zufall

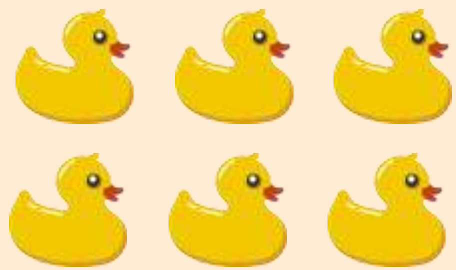
Größen und Messen

(www.smartvic.com)

Beispiel für eine Frage aus dem SMART-Test

Lucy kauft 6 Enten für insgesamt 12 Euro.
Sie möchte herausfinden, wie teuer eine Ente ist und schreibt $6e = 12$.
Wofür steht das **e** in Lucys Gleichung?

- eine Ente
- Euro
- die Anzahl der Enten
- Enten
- die Kosten einer Ente



specific mathematics assessments that reveal thinking

Häufige Fehlvorstellungen:

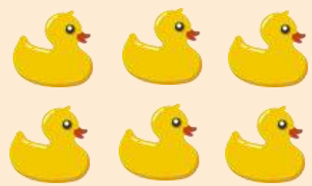
- Variable werden als Objekte (statt als Zahlen) interpretiert
- Variable werden mit einer Größe aus dem Kontext verwechselt

(Angelehnt an Blomberg & Abshagen 2017; www.smartvic.com))

Der Gegenstandsaspekt – Situationen algebraisch beschreiben

Lucy kauft 6 Enten für insgesamt 12 Euro.
Sie möchte herausfinden, wie teuer eine Ente ist und schreibt $6e = 12$.
Wofür steht das **e** in Lucys Gleichung?

- eine Ente
- Euro
- die Anzahl der Enten
- Enten
- die Kosten einer Ente



Für meinen Geburtstag habe ich **r** rote Ranunkeln und **l** lila Lavendel-Pflanzen gekauft. Die Ranunkeln kosten jeweils 4 €. Der Lavendel kostet jeweils 5 €

Welche Gleichung gibt an, dass die Pflanzen insgesamt 70 € gekostet haben?

- $4r + 5l = 70$
- $10r + 6l = 70$
- $r + l = 70$

In einem Geschäft gibt es Fahrräder **f** (mit jeweils 2 Reifen) und **d** Dreiräder (mit jeweils 3 Reifen).

Welche Gleichung gibt an, dass es in dem Geschäft insgesamt 100 Reifen gibt?

- $2f + 3d = 100$
- $f + d = 100$
- $35f + 10d = 100$

An einer Universität sind **P** Professoren und **S** Studenten. Auf einen Professor kommen 6 Studenten.

Drücken Sie die Beziehung zwischen S und P durch eine Gleichung aus!

(Blomberg & Abshagen 2017, Malle 1993)

Was muss man alles zum Variablenbegriff lernen?

Sichtweisen auf die Variable...

- als allgemeine Zahl
  (bereits in der Grundschule z.B. beim Kommutativgesetz)
- als Unbekannte
  (bereits in der Grundschule durch Kästchen)
- als Veränderliche
  (bereits in der Grundschule bei produktiven Päckchen)

Aus einem Schulbuch:

> Platzhalter, für die man verschiedene Zahlen einsetzen kann, nennt man VARIABLEN.
> Man kann dafür Buchstaben schreiben.
> TERME enthalten Zahlen, Rechenzeichen, Klammern und auch Variablen.

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekte

		und was man mit Variablen in ihren Rollen tun kann (Variablenaspekte)		
Die Rollen, die Variablen spielen können (Grundvorstellungen)		Man kann Werte dafür **einsetzen** (Einsetzungsaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu **beschreiben** (Gegenstandsaspekt)	Man kann damit **rechnen** (Kalkülaspekt)
	Variable als **allgemeine Zahl**			
	Variable als **Unbekannte**			
	Variable als **Veränderliche**			

(Malle 1993; Vollrath 1994; Barzel und Holzäpfel 2011, 2017)

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekte

		und was man mit Variablen in ihren Rollen tun kann (Variablenaspekte)		
		Man kann Werte dafür **einsetzen** (Einsetzungsaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu **beschreiben** (Gegenstandsaspekt)	Man kann damit **rechnen** (Kalkülaspekt**)**
Die Rollen, die Variablen spielen können (Grundvorstellungen)	Variable als **allgemeine Zahl**	Überprüfe das Rechengesetz durch Einsetzen von verschiedenen Zahlen: $x + y = y + x$	Aus wie vielen Punkten besteht das Muster an einer beliebigen Stelle?	Nutze das Kommutativgesetz $x + y = y + x$ um die Gleichung umzuformen.
	Variable als **Unbekannte**			
	Variable als **Veränderliche**			

(Malle 1993; Vollrath 1994; Barzel und Holzäpfel 2011, 2017)

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekte

		und was man mit Variablen in ihren Rollen tun kann (Variablenaspekte)		
Die Rollen, die Variablen spielen können (Grundvorstellungen)		Man kann Werte dafür **einsetzen** (Einsetzungsaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu **beschreiben** (Gegenstandsaspekt)	Man kann damit **rechnen** (Kalkülaspekt)
	Variable als **allgemeine Zahl**	Überprüfe das Rechengesetz durch Einsetzen von verschiedenen Zahlen: $x + y = y + x$	Aus wie vielen Punkten besteht das Muster an einer beliebigen Stelle?	Nutze das Kommutativgesetz $x + y = y + x$ um die Gleichung umzuformen.
	Variable als **Unbekannte**	Setze verschiedene Zahlen in die Gleichung ein.	An der wievielten Stelle steht das Muster mit 36 Punkten?	An welcher Stelle ist der Funktionswert 0? Forme um und berechne den x-Wert.
	Variable als **Veränderliche**			

(Malle 1993; Vollrath 1994; Barzel und Holzäpfel 2011, 2017)

Grundvorstellungen zu Variablen und Variablenaspekte

		und was man mit Variablen in ihren Rollen tun kann (Variablenaspekte)		
Die Rollen, die Variablen spielen können (Grundvorstellungen)		Man kann Werte dafür **einsetzen** (Einsetzungsaspekt)	Man nutzt sie, um damit etwas zu **beschreiben** (Gegenstandsaspekt)	Man kann damit **rechnen** (Kalkülaspekt**)**
	Variable als **allgemeine Zahl**	Überprüfe das Rechengesetz durch Einsetzen von verschiedenen Zahlen: $x + y = y + x$	Aus wie vielen Punkten besteht das Muster an einer beliebigen Stelle?	Nutze das Kommutativgesetz $x + y = y + x$ um die Gleichung umzuformen.
	Variable als **Unbekannte**	Setze verschiedene Zahlen in die Gleichung ein.	An der wievielten Stelle steht das Muster mit 36 Punkten?	An welcher Stelle ist der Funktionswert 0? Forme um und berechne den x-Wert.
	Variable als **Veränderliche**	Setze verschiedene Zahlen in den Term ein.	Aus wie vielen Punkten besteht das nächste/ das 20. Muster?	Funktionsterm umformen: $f(x) = (x+3)^2 = x^2 + 6x + 9$

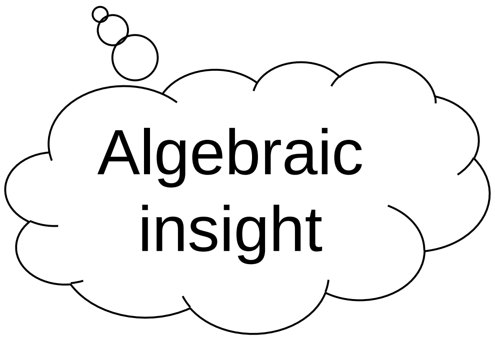
(Malle 1993; Vollrath 1994; Barzel und Holzäpfel 2011, 2017)

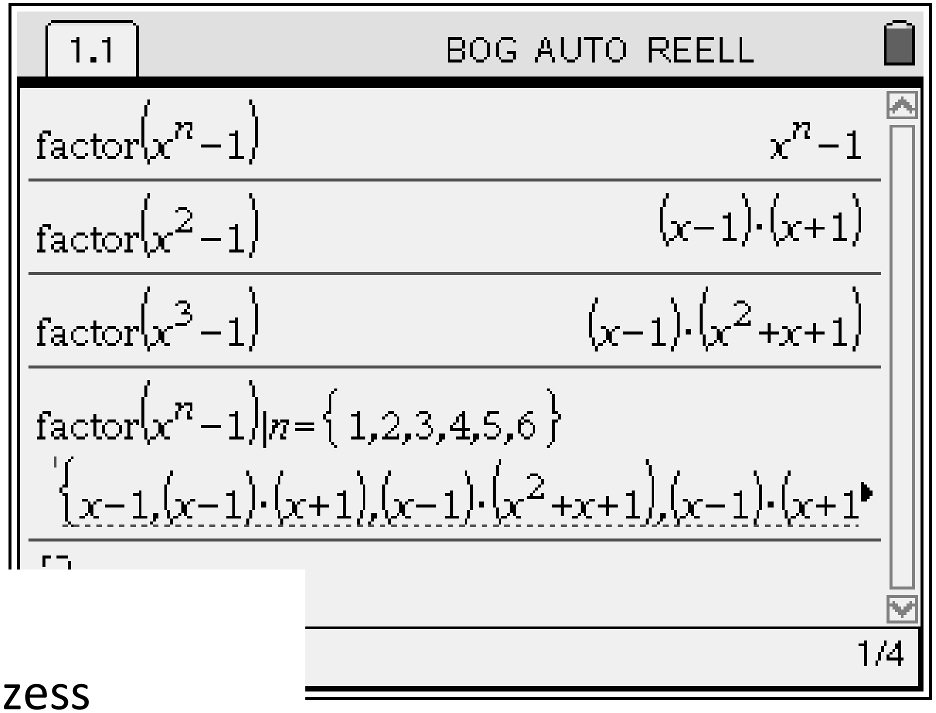
Der Blick auf Medien:

Vertiefen des Strukturblicks mit Computeralgebra

Konzeptuelles Wissen kann durch CAS gefördert werden

Untersuche x^n-1





Vorteile:

- verkürzt den gesamten Lösungsprozess
  (Abdullah 2007)
- Ermöglicht direkten Abgleich von Input und Output (Zeller und Barzel 2010)
- CAS wird zum mathematischen Labor
  (Cuoco und Levasseur 2003)

(Kieran und Drijvers 2006)

Barzel 2012

Der Blick auf Medien:

Vertiefen des Strukturblicks mit Computeralgebra

CHANCEN: Es werden herkömmliche Denkformen verstärkt, neue ermöglicht und damit neue Wege zu Erkenntnis gewonnen.

Algebraic insight

„Tippe folgende Terme ein und erkläre das Ergebnis:

- *Warum haben verschiedene Terme das gleiche (oder ein unterschiedliches) Ergebnis?*
- *Welche allgemeinen Gesetzmäßigkeiten stecken dahinter?"*

1. -2^6
2. -4^3
3. $(-2)^6$
4. $(-4)^3$
5. $-2^3 \cdot (-2)^4$
6. $-2^3 + (-2)^4$
7. $a^3 \cdot a^4$
8. $a^3 + a^4$
9. $(a^3)^4$
10. $a^{(3^4)}$

Der Blick auf Medien:

Vertiefen des Strukturblicks mit Computeralgebra

Gib ein und interpretiere die Ausgaben. Wie rechnet der Taschenrechner?

Gib $anna$ ein.
Gib $a+n+n+a$ ein
Gib $an-na$ ein.
Gib $a\cdot n+n\cdot a$ ein.
Gib $a\cdot n\cdot n+a$ ein.
Gib $a\cdot nn\cdot a$ ein.
Gib $(a:n):(n:a)$ ein.
Gib $an:n:a$ ein.

Mache $anna$ zu null.
Mache $anna$ zu eins.
Mache $hannah$ zu null.
Mache $hannah$ zu eins.
Finde mehr als eine Lösung .
Finde einen Namen, der zwei werden kann ☺

Welche Namen verbergen sich hier?

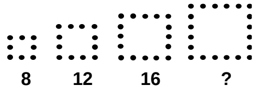
Pinkernell
2006

Algebra – eine Reise durch die Jahrgänge

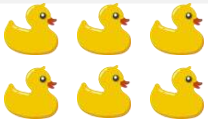
5

Variable
Allgemeine Zahl

6



Terme
Rechenausdruck



Variable
Allgemeine Zahl
Veränderliche
Unbekannte

7

8

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

Variablen
verstehen & nutzen

Terme
verstehen

Zusammenfassung Variable

Verstehensgrundlagen identifizieren

- Variable tragen verschiedene Grundvorstellungen bzw. spielen verschiedene Rollen (Allgemeine Zahl, Unbekannte, Veränderliche)
  In der Grundschule ist die Variable meist Unbekannte.

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

- Manche Lernende haben keine tragfähigen Vorstellungen davon, wofür Variablen benutzt werden und was man mit ihnen tun kann.
  Mit diagnostischen Aufgaben (z.B. SMART-Tests) kann dies genauer erfasst werden.

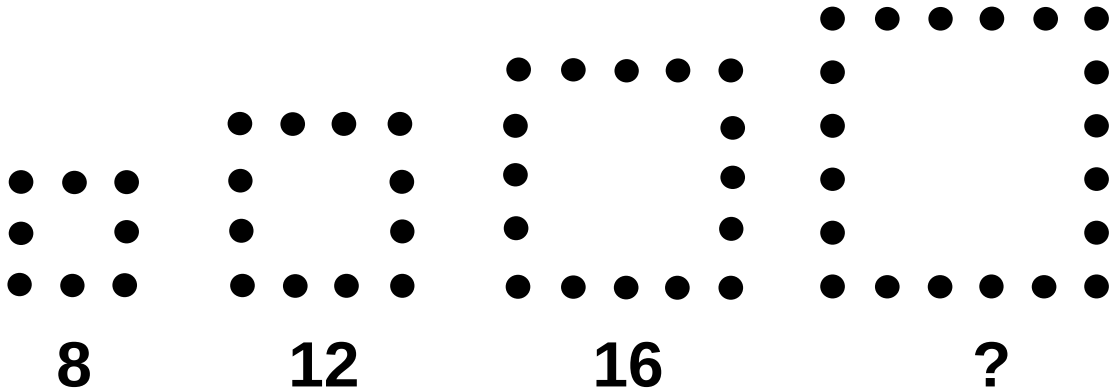
Verstehensgrundlagen fördern

- Durch Aufgaben, welche die Verstehensgrundlagen zu Variablen thematisieren, kann Verständnis aufgebaut werden.
  Z.B. kann die Arbeit mit Computeralgebra das algebraische Verständnis vertiefen (algebraic insight).

Gliederung

Vorstellungen aufbauen durch Darstellungsvernetzung

Eine Aufgabe in Anlehnung an PISA 2003

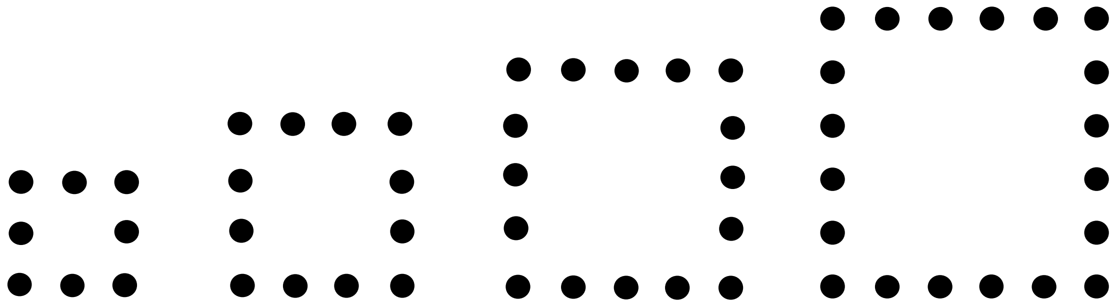


Folge figurierter Zahlen

- a) Wie geht es weiter?
- b) Aus wie vielen Punkten besteht die 20. Figur?
- c) Aus wie vielen Punkten besteht die Figur an einer beliebigen Stelle? Notieren Sie dazu einen Term.

Vorstellungen aufbauen durch Darstellungsvernetzung

Eine Aufgabe in Anlehnung an PISA 2003

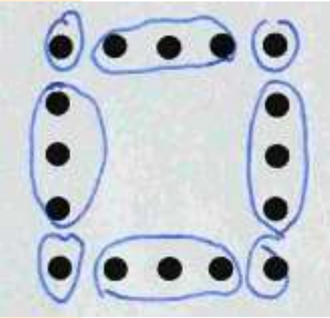


Ich beginne bei 8 und zähle immer vier dazu. Das mache ich 19 Mal.

Ich sehe im Bild, dass immer in den Zwischenstücken was dazu kommt

Folge figurierter Zahlen

- a) Wie geht es weiter?
- b) Aus wie vielen Punkten besteht die 20. Figur?



Ich schreibe mir das als Tabelle auf und sehe dann, was passiert:

8	
12	+4
16	+4
20	+4

Ich kann das als Term schreiben und berechnen:

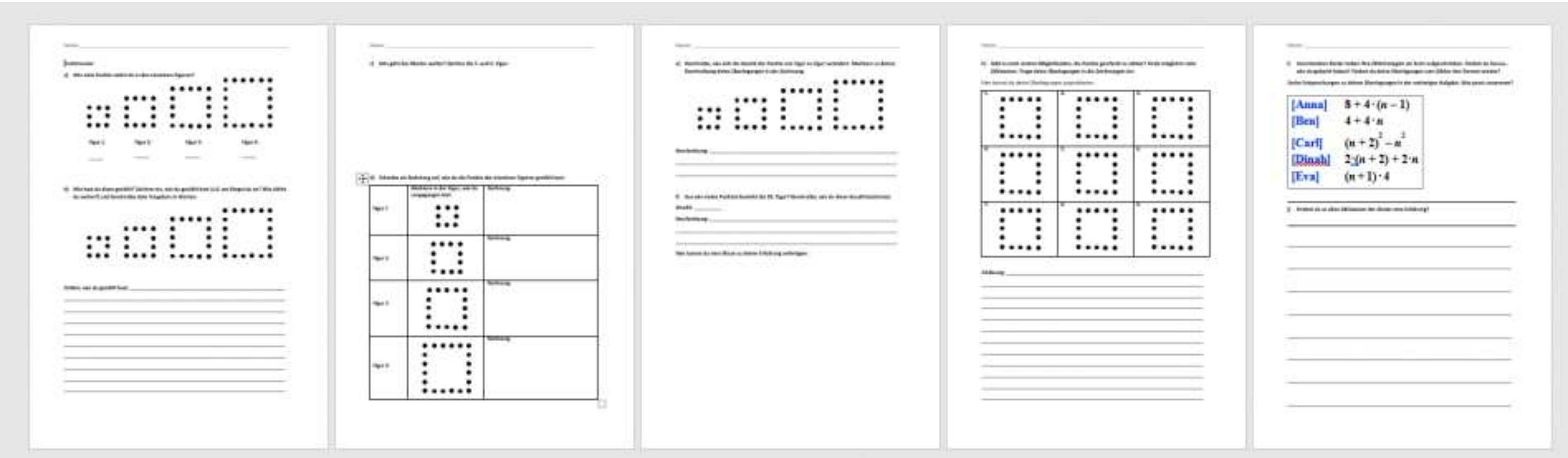
$4 + 1 \cdot 4$

$4 + 2 \cdot 4$

$4 + 3 \cdot 4$ usw.

Ein Blick in den Unterricht …

Gestufte Unterstützung … (Beispiel aus Klasse 9, Realschule)



Ergänzende Aufgabenstellung:
Interpretation der gegebenen Terme

Wie wurde hier jeweils gezählt?

$8 + 4 \cdot (n - 1)$

$4 + 4 \cdot n$

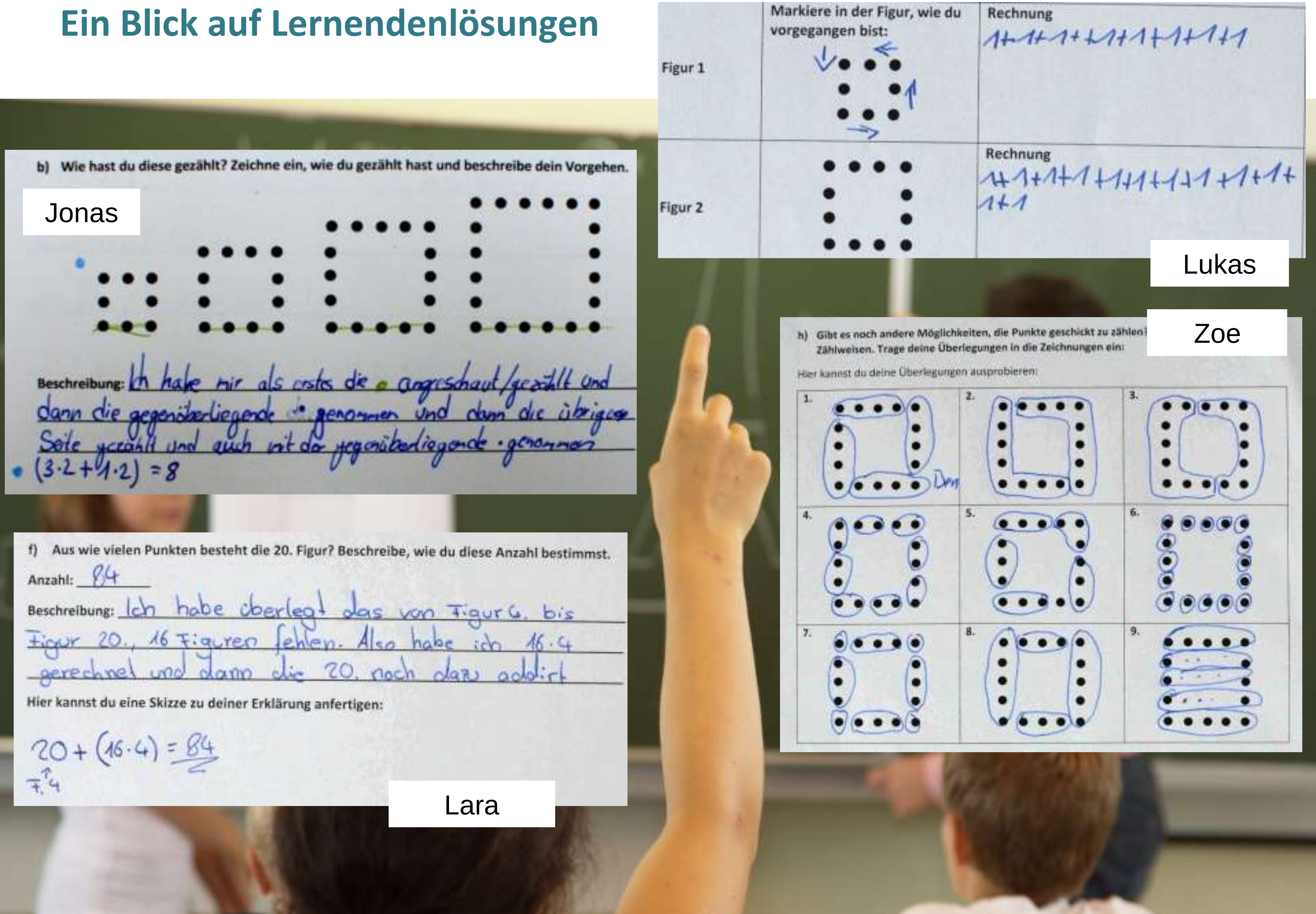
$(n + 2)2 - n2$

$2 \cdot (n + 2) + 2 \cdot n$

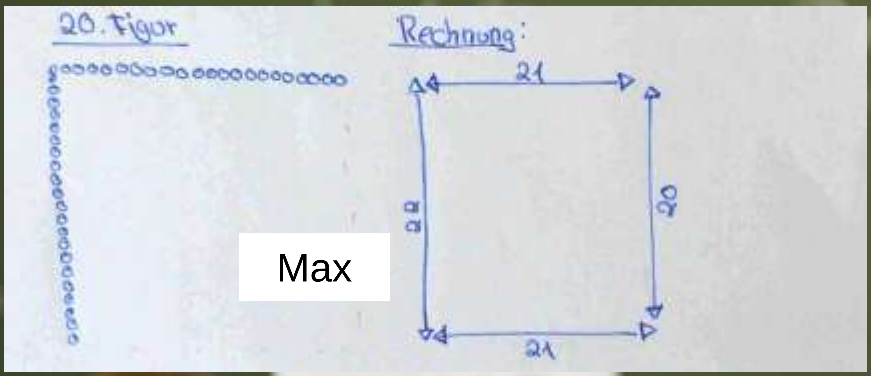
$(n + 1) \cdot 4$

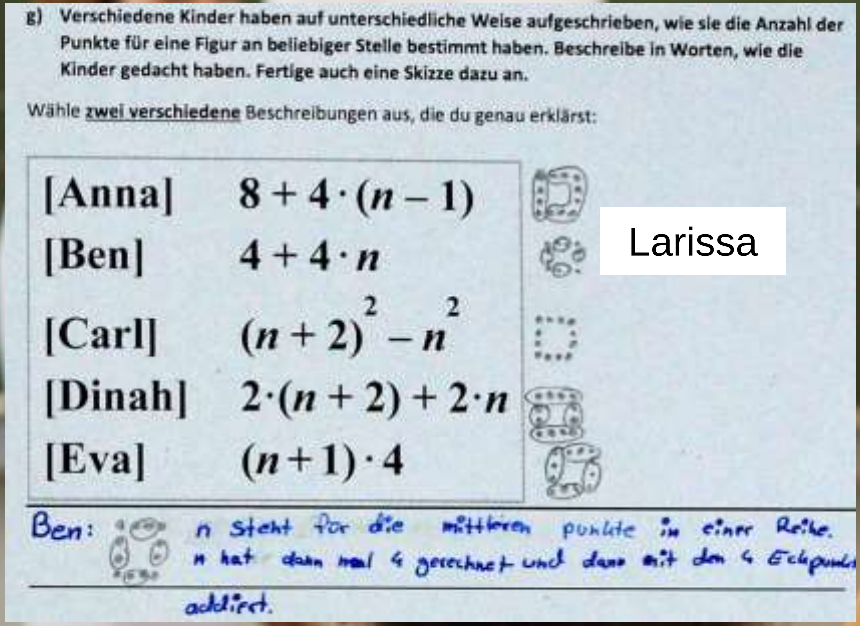
Wieland, G. (2006). mathematik lehren 136

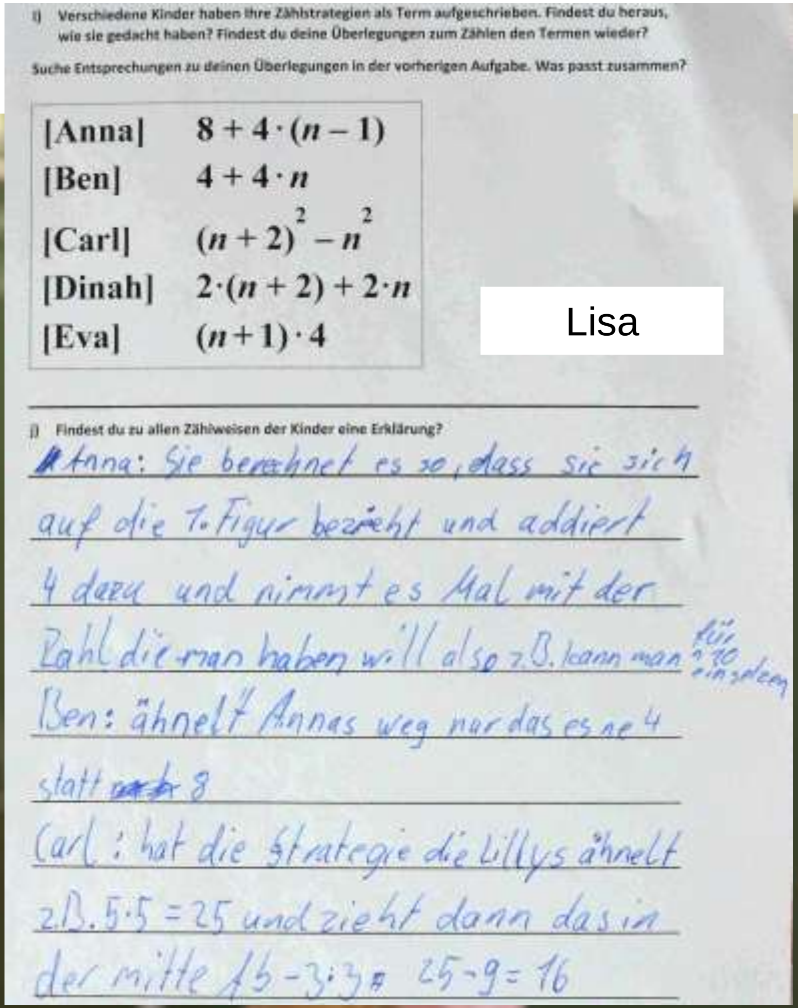
Ein Blick auf Lernendenlösungen



Ein Blick auf Lernendenlösungen



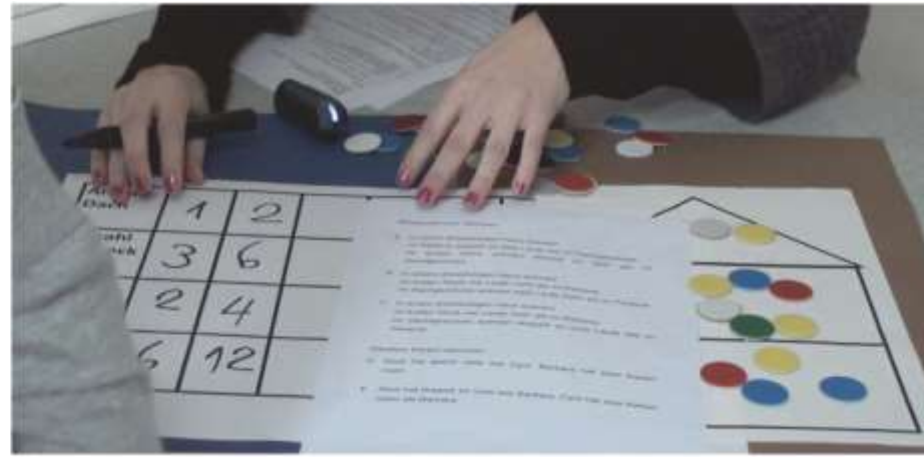




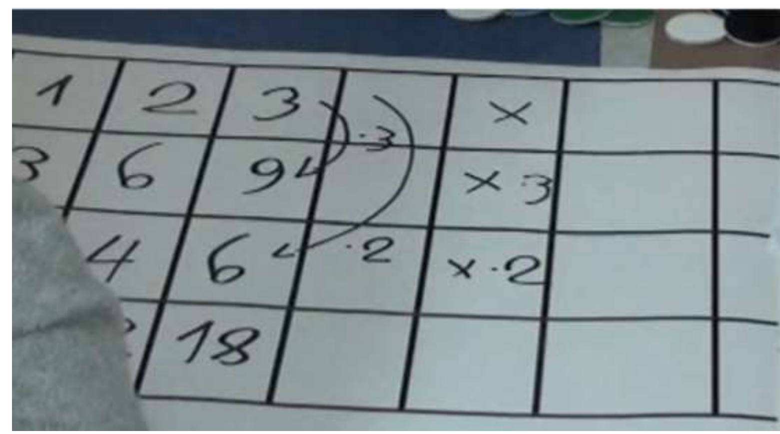
Terme aufstellen zu einem Kontext

Aufgabe

In einem dreistöckigen Haus wohnen im Parterre doppelt so viele Leute wie im Dachgeschoss. Im ersten Stock wohnen dreimal so viele wie im Dachgeschoss.



S1: Spielt es keine Rolle, wie viele drinnen wohnen?
I: Ehm… Was würdest du sagen?
S 2: Es sind eigentlich keine Zahlen angegeben? … (Liest nochmals Aufgabe1). Nein, es ist ja keine Zahl angegeben.



Nydegger, S. 87ff

Zahlenterme beschreiben Situationen

Was kann alles mit Zahlentermen gefördert werden?

- Flexibilisierung von Operationsvorstellungen
- auch komplexere Situationen können nachvollzogen und mehrgliedrige, geschachtelte Terme können aufgestellt werden
- systematische Beziehung zwischen Termstruktur und Situation kann hergestellt werden
- Strategien zum Verstehen von Termstrukturen können entwickelt werden
- Zugänglichkeit auch für Schwächere (durch konkrete Situationen, bevor abstrakte, strukturgleiche Situationen folgen)

Impulsfrage

Wann sind zwei Terme „gleich?“

a) Was würde Ihre Klasse auf diese Frage antworten?

b) Was würden Sie darauf antworten?

Notieren Sie Ihre Antworten auf dem Padlet (Aktivität 2)!

Seminar-Padlet für 21.06.2022 (Aktivität 2)
https://padlet.com/maco_algebra/trmr3lf1dnqu42s3
Brauchen wir öfters

Gleiche Situationen mit unterschiedlichen Termen beschreiben

Gleichwertigkeit von Termen

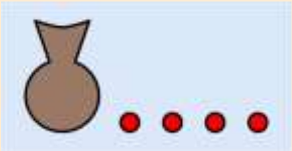
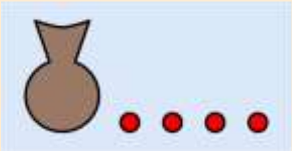
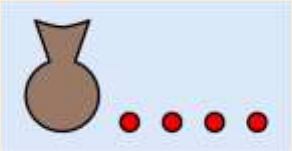
Terme
beschreiben dieselbe Situation

Terme
liefern beim **Einsetzen** dasselbe Ergebnis

Situation im Unterricht

Erst selbst beschreibungsgleiche Terme finden, dann mit anderen Termen vergleichen und schließlich einsetzen.

$3\,(n + 4)$
$3n + 12$
$(n + 4) + (n + 4) + (n + 4)$

Gleiche Situationen mit unterschiedlichen Termen beschreiben

$3 \cdot (x + 4) \overset{?}{=} 3x + 12$

	3 (x + 4)	3x + 12
x = 1	$3 \cdot 5 = 15$	$3 + 12 = 15$
x = 3	$3 \cdot 7 = 21$	$9 + 12 = 21$

$3 \cdot (x + 4)$ (Ausmultiplizieren)
$= 3x + 12$

Beschreiben die Terme dasselbe Bild, dieselbe Situation?

Kommt beim **Einsetzen** aller Zahlen derselbe Wert heraus?

Kann man durch kalkülhafte **Umformungen** vom einen zum anderen kommen?

Inhaltliches Denken: zwei Grundvorstellungen → Kalkül

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

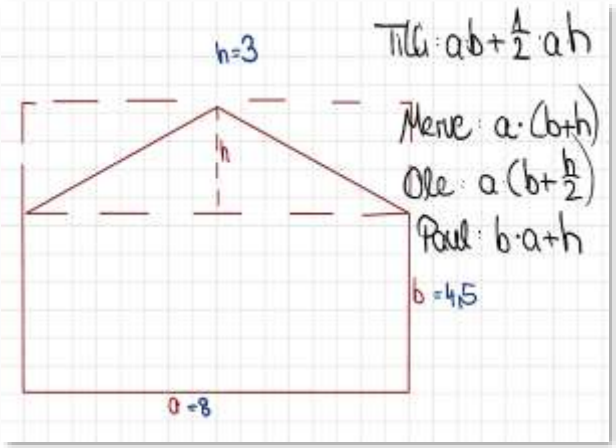
Einbettung in sinnstiftenden Kontext

Flächenberechnung beim Fensterbauer




Erst selbst allgemeine Berechnungsterme finden, dann mit Berechnungstermen von anderen vergleichen

	A	B	C	D	E	F	G	
1					Müller Fensterbau			
2					GmbH & Co KG			
3								
4	Abrechnung für rechteckige Fenster							
5	**Fenstermaße**	Höhe			1,2	m		
6		Breite			2	m		
7								
8							**Preis**	
9	**Fensterfläche**	Preis pro qm			3	€ / m²		
10		berechnete Fläche			2,4	m²		
11		Materialpreis	gesamt				7,20	€
12		Arbeitszeit Zuschnittt	pauschal		20	€	20,00	€
13								
14	**Rahmen**	Preis pro laufendem Meter			10	€ / m		
15		berechneter Umfang			6,4	m		
16		Materialpreis Rahmen					64,00	€

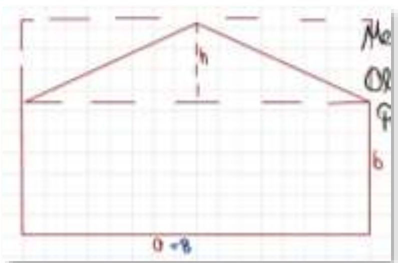


a	b	h	$a\cdot b+\frac{1}{2}\cdot a\cdot h$	$a\cdot(b+\frac{h}{2})$
7	2	4	28 28	

(Prediger, Zwetzschler, Schmidt 2014)

Gleiche Situationen mit unterschiedlichen Termen beschreiben

$a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a\,h \quad \overset{?}{=} \quad a \cdot (b + \frac{h}{2})$



a	b	h	$a \cdot b + \frac{1}{2} \cdot a \cdot h$	$a \cdot (b + \frac{h}{2})$
7	2	4	28 28	

$$
\begin{aligned}
& a \cdot b + \tfrac{1}{2} \cdot a\,h && \text{(Ausklammern)} \\
&= a\,(b + \tfrac{1}{2}\,h) && \text{(Zusammenfassen)} \\
&= a\,(b + \tfrac{h}{2})
\end{aligned}
$$

Beschreiben die Terme dasselbe Bild, dieselbe Situation?

Kommt beim **Einsetzen** aller Zahlen derselbe Wert heraus?

Kann man durch kalkülhafte **Umformungen** vom einen zum anderen kommen?

Inhaltliches Denken: zwei Grundvorstellungen → Kalkül

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

Beispiel: Typische Aufgabe aus Klasse 8:

Lösung von Lea

$$4n + 6n + 3 = 10n + 3 = 13n$$

Vereinfache den folgenden Term:

$4n + 6n + 3$

LP: Guck nochmal auf deine Rechnung, $10n + 3 = 13n$, stimmt das wirklich?
Lea: Ja, wieso?
LP: Setz doch für n mal eine Zahl ein und überprüfe das.
Lea: Wie meinen Sie das?
LP: Na ja, nimm doch statt n mal die 4 und schreibe das auf.
Lea: (schreibt $10\ 4 + 3$, stockt) Nee, wär‘ ja dann mal, (schreibt $10 \cdot 4 + 3 = 43$)
LP: Und die 13n?
Lea: Die wären dann, mhh, 52.
LP: Und, fällt dir was auf?
Lea: Nö, was? (guckt auf die Zahlen, zögert) Ist das wohl falsch?
LP: Da kommt gar nicht das Gleiche raus?
Lea: Nö. Aber … das ist ja auch mit 4 nicht mit n.

Kalkülfehler mit inhaltlichem Hintergrund

(nach Prediger 2009, S. 13 f.)

Die Rolle der Medien: Aufstellen von Termen in Tabellenkalkulation

Veränderliche Situationen beschreiben

Was kostet das Autofahren im Vergleich zum Bahnfahren?

x km · 0,06 l/km · 1,90€/l

Monat	Kilometerzahl	Benzinverbrauch Term	Benzinkosten Term	Benzinkosten in €
Februar	600	600 · 0,06	600 · 0,06 · 1,90	68,40
Juli (Urlaub)	5800	5800 · 0,06	5800 · 0,06 · 1,90	661,20
Dezember (Oma besuchen)	1900	1900 · 0,06	1900 · 0,06 · 1,90	216,60
x - beliebige Kilometerzahl	x	x · 0,06		

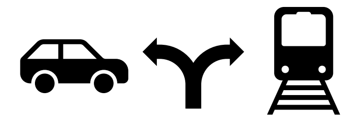
- Die Variable als x-beliebige Zahl, für die man beliebige Werte einsetzen kann.

Die Rolle der Medien: Aufstellen von Termen in Tabellenkalkulation

fx =B14+C14*D14*0,04+4*F14

9	Tabellenkalkulationsblatt zur Aufgabe Erkunden 4: Was kostet das Auto?					
10						
11						
12/13	Wertverlust in 4 Jahren (in Euro)	Benzinpreis (in Euro pro Liter)	Kilometerzahl in 4 Jahren (im Kilometer)	Benzinkosten in 4 Jahren (in Euro)	Jährliche Reparatur / Steuer / Versicherung (in Euro)	Gesamtkosten in 4 Jahren (in Euro)
14	3000	2,05	40000	3280	900	9880
15						

Was kostet das Autofahren im Vergleich zum Bahnfahren?



x km · 0,06 l/km · 1,90€/l

a) Großer Neuwagen 40000€
kleiner Gebrauchter 3000€

gr. Neuwagen ca 1,50€ pro km
also 100 km = 150€

kleiner Gebrauchter ca 4km pro 1,50€
40 km → 60€

Wertverlust für großen Neuwagen:
40000€ - 5000€ = 35 000€
Wertverlust für kleinen Gebrauchtwagen
3000€ - 500€ = 2500€

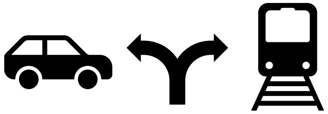
b) Habe mit Jojo verglichen

a) Die Berechnung ist fast immer gleich. Meistens verändert sich nur die Kilometerzahl.
Der Term dazu sieht so aus:
x · 0,04 · 1,50 = y

Lernendenlösungen

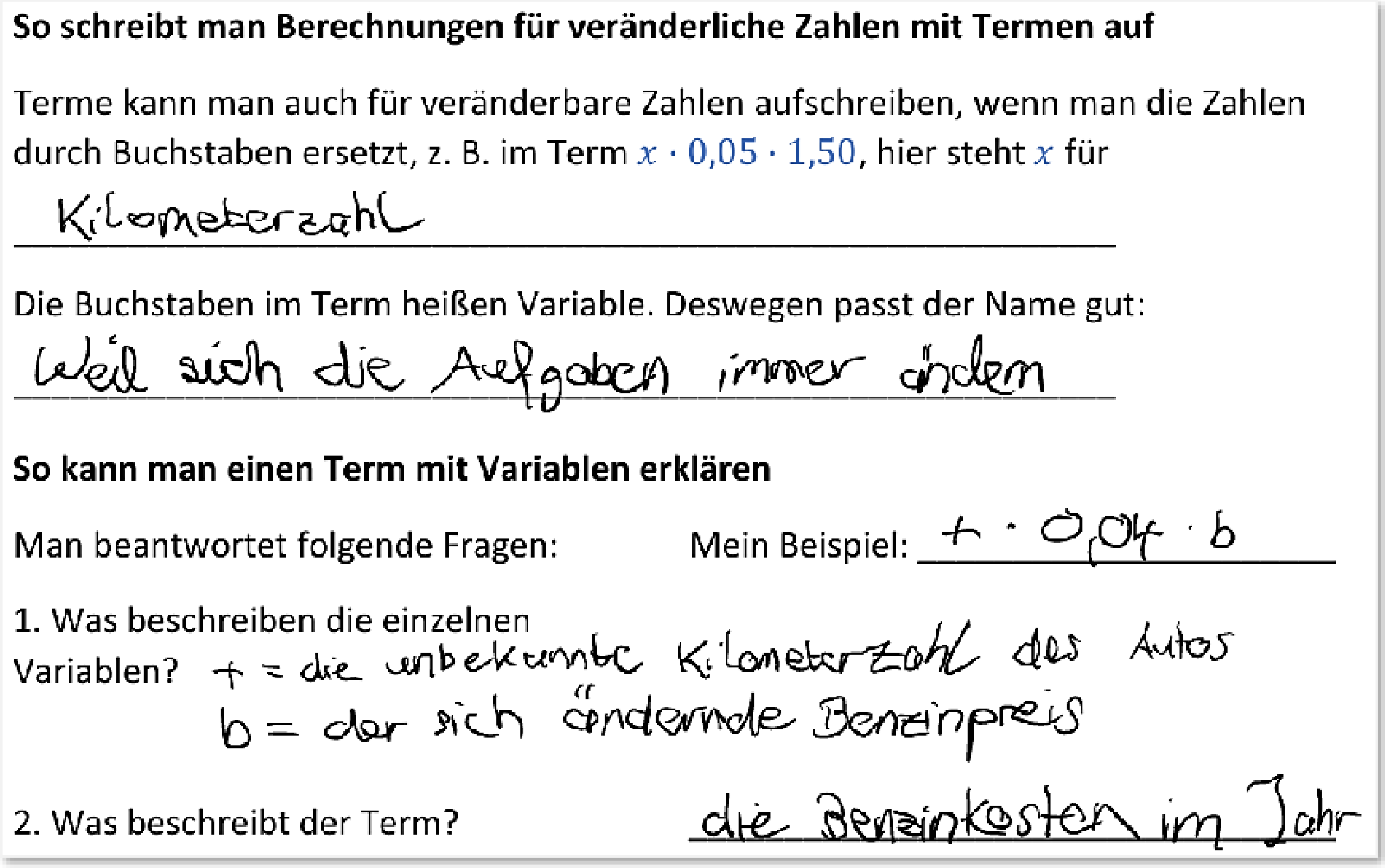
Die Rolle der Medien: Aufstellen von Termen in Tabellenkalkulation

Was kostet das Autofahren
im Vergleich zum Bahnfahren?



x km · 0,06 l/km · 1,90€/l

Lernendenlösung



So schreibt man Berechnungen für veränderliche Zahlen mit Termen auf

Terme kann man auch für veränderbare Zahlen aufschreiben, wenn man die Zahlen durch Buchstaben ersetzt, z. B. im Term $x \cdot 0{,}05 \cdot 1{,}50$, hier steht x für

Kilometerzahl

Die Buchstaben im Term heißen Variable. Deswegen passt der Name gut:

Weil sich die Aufgaben immer ändern

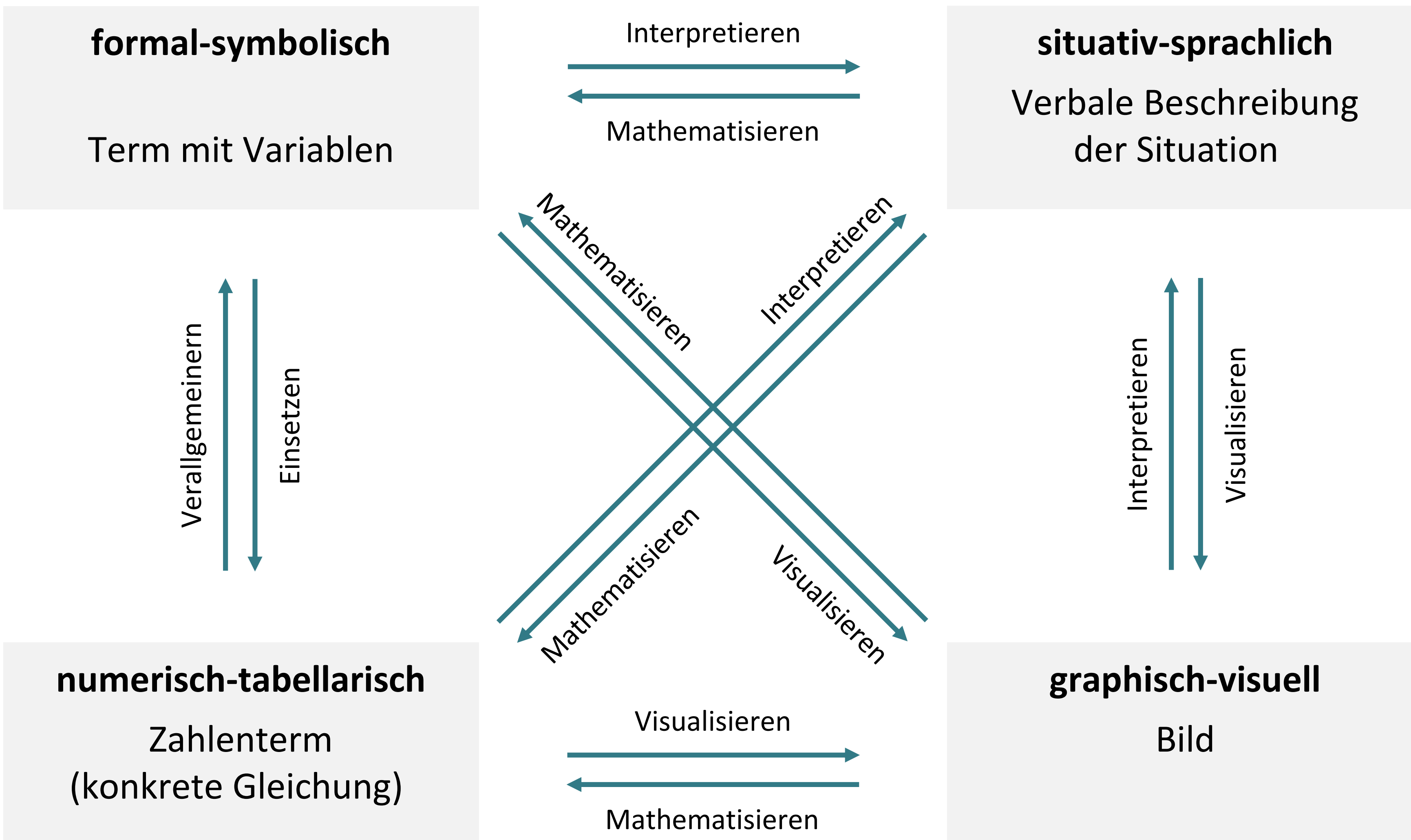
So kann man einen Term mit Variablen erklären

Man beantwortet folgende Fragen: Mein Beispiel: $t \cdot 0{,}04 \cdot b$

1. Was beschreiben die einzelnen Variablen? t = die unbekannte Kilometerzahl des Autos
b = der sich ändernde Benzinpreis

2. Was beschreibt der Term? die Benzinkosten im Jahr

Die Rolle der Medien: Unterstützen des Darstellungswechsels



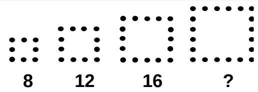
(Angelehnt an Barzel, Glade & Klinger 2021)

Algebra – eine Reise durch die Jahrgänge

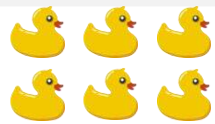
5

Variable
Allgemeine Zahl

6



Terme
Rechenausdruck

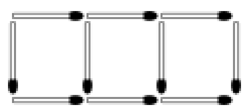


Variable
Allgemeine Zahl
Veränderliche
Unbekannte

Terme
Einsetzungsgleichheit

7

Terme
Beschreibungsgleichheit



8

Terme
Umformungsgleichheit

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

Variablen
verstehen & nutzen

Terme
verstehen, aufstellen & nutzen

Zusammenfassung Terme

Verstehensgrundlagen identifizieren

- Das Aufstellen von Termen zu Bilderfolgen/Situationen ist eine wichtige Grundlage, Variablen und Terme in ihrer Bedeutung zu erfassen.
- Die Gleichwertigkeit von Termen umfasst Beschreibungs- und Einsetzungsgleichheit als Grundlage von Umformungsgleichheit.

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

- Beim Aufstellen und Umformen von Termen entstehen Probleme.
- Fehlerhafte Grundvorstellungen lassen sich durch das Analysieren von Lernendenlösungen erkennen. Dabei bietet sich gezielte Darstellungsvernetzung zur Diagnose an.

Verstehensgrundlagen fördern

- Durch Darstellungsvernetzung können Schwierigkeiten überwunden werden und das Aufstellen von Termen in ihrer Bedeutung erfasst werden.
- Mit Tabellenkalkulation können Lernende auch komplexere Situationen bearbeiten, ohne von schwierigen Rechnungen überfordert zu werden.

Gliederung

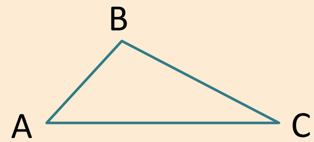
1. Einstieg
2. Variablen verstehen und nutzen
3. Terme verstehen, aufstellen und nutzen
4. Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen
5. Ausblick

Gleichungen – Typische Schwierigkeiten beim Lösen (linearer) Gleichungen

VOR dem Lösen

Mit welcher Gleichung würdest du beginnen?

Der Umfang beträgt 60 cm.



AC ist 15 cm länger als AB.
BC ist 12 cm länger als AB.

- **Es wird kein Term/ keine Gleichung gefunden**
- **Ausdruck wird flüchtig angesehen**
  - Nicht Erfassen von Bezügen — $x + 12 + 15 = 60$ — Bezugsgröße wird nicht beachtet.
  - Fehlender Referenzterm — $x + 12 + x + 15 = 60$ — Teilterme sind richtig formuliert, aber Referenzterm fehlt.
- **Individuelle Anpassung irgendwelcher Schemata**
  - Additiver Charakter — $x + y + 2 = 60$ — Aufschreiben neuer Variablen
  - Arithmetischer Prozess — $x = (60 - 12 - 15) : 3$ — Algebraische Vorgehensweise zum Lösen von Gleichungen noch nicht bekannt
  - Variable als Einheit — $15x + 12x = 60$ — Richtiges arithmetisches Vorgehen, aber Variable als Einheit verstanden.
  - Termstruktur entlang der Abfolge im Text

(Aufgabe angelehnt an www.smartvic.com)

Gleichungen – Typische Schwierigkeiten beim Lösen (linearer) Gleichungen

WÄHREND des Lösens

- **Idee der äquivalenten Umformung nicht verinnerlicht**
  - Termumformung auf einer Gleichungsseite statt Äquivalenzumformung

    $x - 15 = 5 \quad | +15$
    $x \quad = 5$

x - a	= b	|+a
x	= b	

  - Additives Lösen der Gleichung

    $x - 3 = 7 \quad | -3$
    $x \quad = 4$

    x – a = b ⇔ x + a = b

  - Umgekehrtes Lösen der Gleichung

    $5 - x = 12 \quad | +5$
    $x = 17$

    a – x = b ⇔ x - a = b

- **Idee der Termumformung nicht verinnerlicht**
  - Klammerloses Lösen der Gleichung

    $3(x+2) = 12 \quad | -2$
    $3x = 10$

    a(x + b) = c ⇔ ax + b = c

  - Vereinfachungsfehler

    $3x + 4y = 14$
    $7xy = 14 \quad | :7y$
    $x = 2$

    Gleichartige Terme werden nicht korrekt zusammengefasst

  - Algebraische Brüche Fehler

    $\frac{x}{2} + 4 = 8 \quad | -4$
    $\frac{x}{2} \quad = 4 \quad | :2$
    $x \quad = 2$

    Formeln der Form $\frac{x}{a} + b = c$ o.ä. werden falsch umgeformt

Gleichungen – Typische Schwierigkeiten beim Lösen (linearer) Gleichungen

NACH dem Lösen

- Es gibt keine oder nur schwach entwickelte Kontrollmechanismen (wie das Angeben von Regeln oder das Widerlegen durch Zahlen), da häufig die Schemata (und damit die Verfahrensschritte) nicht verstanden sind.
- Die Umformungstätigkeiten werden nicht kritisch hinterfragt.

Verschiedene Vorstellungen von Gleichheit und Gleichheitszeichen

Welche Rolle übernimmt das Gleichheitszeichen in den folgenden Gleichungen?
Ordnen Sie die Gleichungen, zunächst selbst und einigen Sie sich dann in der Gruppe auf eine Zuordnung!
Halten Sie diese im Padlet fest (Aktivität 3).

a) Volumenformel für Kegel

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

b) Sei $y := 2x + 52$

c) Sei $f(x) = 2x + 52$

d) $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

e) $0 = 12x^2 - 3x + 24$

f) $24 : 6 - 3 =$

g) Gesucht ist *x* mit

$x^2 + x - 6 = 0$

h) $5 = 2x + 52$

i) $2x + 4 - (x + 3) = x + 1$

Seminar-Padlet für 21.06.2022 (Aktivität 3)
https://padlet.com/maco_algebra/trmr3lf1dnqu42s3

(AM1_Gleichheitszeichen.docx)

Verschiedene Vorstellungen von Gleichheit und Gleichheitszeichen

1. **Arithmetische Gleichheit**
   (Aufforderung zum Rechnen)

   $24 : 6 - 3 =$

   = als Operations-zeichen

2. **Bestimmungsgleichungen**
   (Gleichheit als Bedingung)

   Gesucht ist *x* mit
   $x^2 + x - 6 = 0$

   = als Relations / Vergleichszeichen

3. **Allgemeine Gleichungen**

   3.1 **Inhaltliche Gleichheit**
   (Formeln in einem Sachzusammenhang)

   Volumenformel für Kegel
   $V = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h$

   = als Relations- / Vergleichszeichen

   3.2 **Formale Gleichheit**
   (Beziehung gleichwertiger Terme)

   $(x - 2)(x + 3) = x^2 + x - 6$

   = als Relations- / Vergleichszeichen

   3.3 **Definitorische Gleichheit**

   Sei $y: = 2x + 52$

   = als Setzungszeichen

(Barzel, Glade, Klinger, 2021)

Zur Erinnerung

Alltagsverständnis

Definition in Wörterbuch

$$2\,(x + 2) \quad \mathbf{=} \quad 2x + 4 \quad \mathbf{?}$$

Einsetzungsgleichheit

„Das Einsetzen mit dem Ziel, eine richtige Aussage zu erhalten, ist in allen Lernstufen eine wichtige Handlung und macht die Gleichung als Aussageform sehr plastisch.“

Beschreibungsgleichheit

„Das Beschreiben einer Situation / eines Objekts mit gleichwertigen Termen, die auf unterschiedliche Sichtweisen zurückgeführt werden können, liefert eine beschreibende Gleichung.“

(Barzel, Holzäpfel, 2011; Prediger, Zwetzschler, 2015; Prediger, 2009)

Vorstellungen zum Lösen von Gleichungen

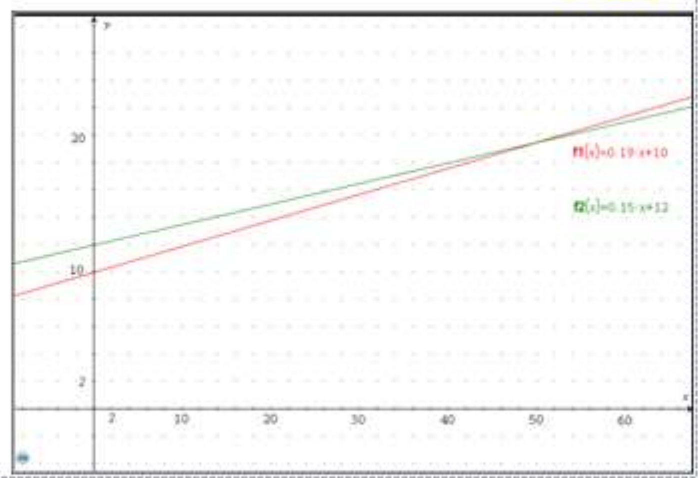
3 Die Gleichheit in Graph und Tabelle erkennen

Ole, Till und Pia vergleichen zwei Tarife und suchen dabei, für welche x die beiden Tarife gleich sind. Dabei gehen sie unterschiedlich vor:

Tarif 1: **0,19 · ▒ + 10**
y= 0,19x + 10

Tarif 2: **0,15 · ▒ + 12**
y= 0,15x + 12

x	Tarif 1: y 0,19x+10	Tarif 2: y 0,15x+12	
0	10	12	Tarif2 größer
1	10,19	12,15	Tarif2 größer
10	11,90	13,50	Tarif2 größer



Aufbau von Vorstellungen zu Äquivalenzumformungen

Herausforderung: Äquivalenzumformung verstehen

Wagenschein irritierte immer wieder „Gebildete" mit der Frage nach der Begründung elementarer Rechenregeln. Die niederschmetternden Ergebnisse veranlassen ihn zu der Frage: „Ist es wirklich tröstlich und erleichternd, was mir mehr als einmal Schulmathematiker erwiderten, wenn ich auf solche Dissonanzen hinwies, solche elementaren Dinge hätten sie selber – offen gestanden – auch erst während ihres Studiums verstanden?" (Wagenschein 1970, S. 418). Er zitiert einen Darmstädter Primaner, der das „kreuzweise Multiplizieren" einer Gleichung auf die Kurzform brachte „riwwer ruff - niwwer nunner" (Wagenschein 1970, S. 423). Es wurde deshalb Wert darauf gelegt, die Umformungen klar herauszuarbeiten (z.B. „beidseitige Multiplikation mit" statt einfach nur „auf die andere Seite bringen") und vielfältig zu verankern (neben der Waage auch „Vergleich von Längen" und „Einsetzungen").

Vollrath: Algebra in der Sekundarstufe, S. 191.

Handlungsorientierte Modelle zur Unterstützung des Verständnis von Äquivalenzumformungen

Knack die Box bzw. Streichholzaufgaben

Wie viele Streichhölzer sind in einer Schachtel?

Legt das Bild mit Streichhölzern und Streichholzschachteln nach. Wie viele Streichhölzer sind in einer Schachtel ?

Begründet für jeden Schritt, dass ihr so vorgehen dürft.

$$\boxed{X}\ \boxed{X}\ \boxed{X}\ ||\ =\ \boxed{X}\ \boxed{X}\ ||\ ||$$

Austausch im Chat und/oder im Plenum

Reflektieren Sie kurz: Was leistet dieser Arbeitsauftrag?

In Anlehnung an mathbuch 8

Handlungsorientierte Modelle zur Unterstützung des Verständnisses von Äquivalenzumformungen

X X X II = X X II II

Wie viele Streichhölzer sind in einer Schachtel?

Zuerst hatten wir die Aufgabe genau betrachtet (XXXII = XXIIII)

Dann haben wir gesehen, dass 2 einzelne Streichhölzer verschwunden und ein X dazu gekommen ist. Also müssen in der Schachtel 2 Streichhölzer sein. (X = Streichholzschachtel, I = einzelnes Streichholz)

Lernendenlösung

Handlungsorientierte Modelle zur Unterstützung des Verständnis von Äquivalenzumformungen

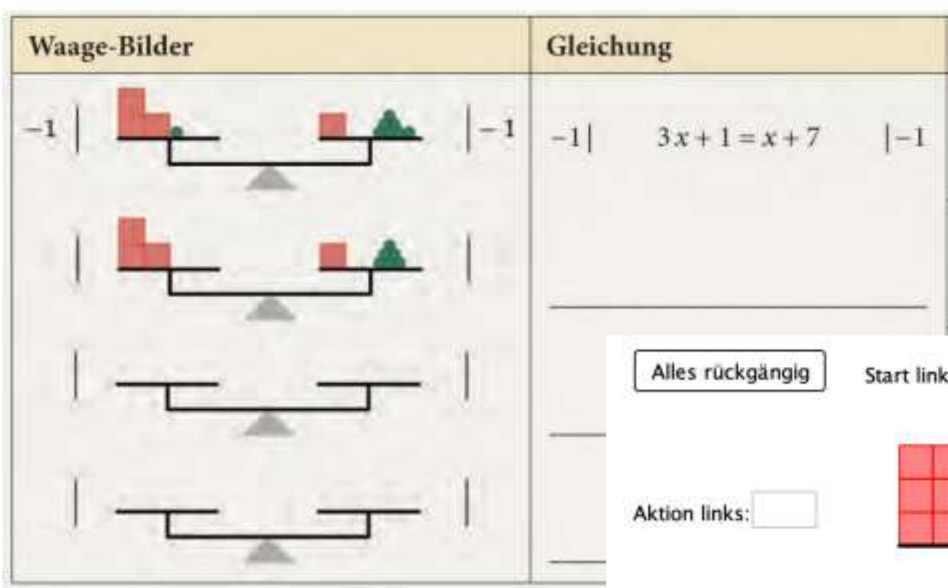
$\boxed{X}\ \boxed{X}\ II = \boxed{X}\ III\ III\ I$

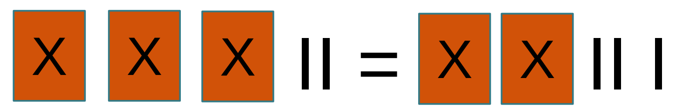
Wir haben die Aufgabe wieder genau betrachtet und festgestellt das man auf beiden Seiten 2 einzelne Striechhölzer wegnehmen kann und so bleiben links 2 Streichholzschachteln und 5 einzelne Streichhölzer. Also sind in jeder Streichholzschachtel 5 Streichhölzer.

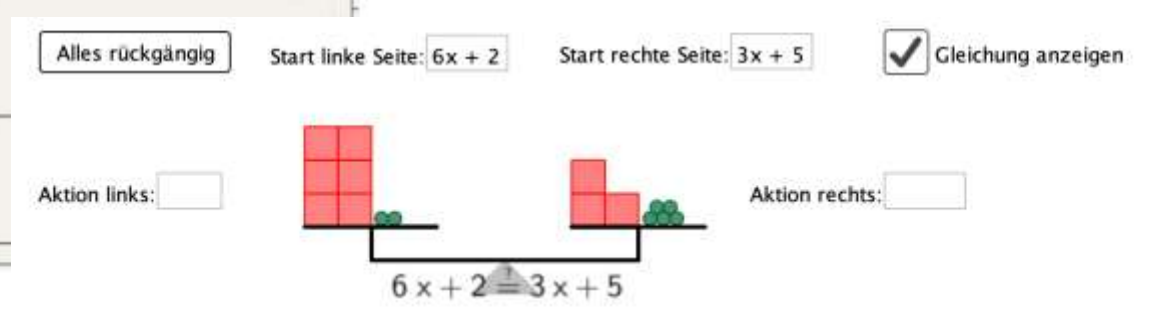
Lernendenlösung

Aufbau von Vorstellungen zu Äquivalenzumformungen

Beschreibung in Alltagssprache		**Mathematische Schreibweise**	
Aufgabe	Vorgehen **(jeweils auf beiden Seiten)**	Aufgabe	Vorgehen **(jeweils auf beiden Seiten)**
XIXIXXX = XIIXIII XXXXXII = XXIIIII XXX II = IIIII XXX = III X = I	Aufräumen XX weglegen II weglegen dritteln	x+1+x+1+3x = x+2+x+3 ⇔ 5x + 2 = 2x + 5 ⇔ 3x + 2 = 5 ⇔ 3x = 3 ⇔ x = 1	Sortieren |-2x |-2 |:3



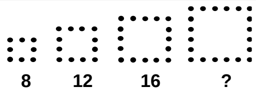




Algebra – eine Reise durch die Jahrgänge

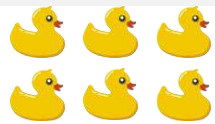
5

Variable
Allgemeine Zahl



6

Terme
Rechenausdruck

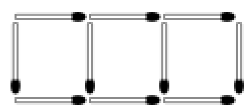


Variable
Allgemeine Zahl
Veränderliche
Unbekannte

Terme
Einsetzungsgleichheit

7

Terme
Beschreibungsgleichheit



Variable
Veränderliche

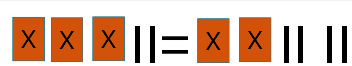
Funktion
Zuordnung, Kovariation

8

Variable
Unbekannte

Terme
Umformungsgleichheit

Gleichungen
aufstellen & lösen



Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

Variablen
verstehen & nutzen

Terme
verstehen, aufstellen & nutzen

Gleichungen
verstehen, aufstellen & lösen

Zusammenfassung Gleichungen

Verstehensgrundlagen identifizieren

- Gleichungen ziehen sich durch die gesamte Schulzeit.
  Die verschiedenen Bedeutungen des Gleichheitszeichens müssen wahrgenommen werden können.
- Um Gleichungen mit Äquivalenzumformungen lösen zu können, brauchen Lernende eine sichere Vorstellung davon.

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

- Vor, während und nach dem Lösen von Gleichungen kann eine Vielzahl an Schwierigkeiten entstehen.
- Fehler beim Kalkül beruhen häufig darauf, dass keine tragfähigen Vorstellungen zu Variablen, Termen und zu Äquivalenzumformungen aufgebaut wurden.

Verstehensgrundlagen fördern

- Modelle (Knack die Box, Waage) helfen beim Aufbau von Vorstellungen zu Äquivalenzumformungen.
  Das gezielte Unterscheiden zwischen Umgangs- und Fachsprache bei der Arbeit mit solchen Modellen ist hilfreich.

Gliederung

1. Einstieg
2. Variablen verstehen und nutzen
3. Terme verstehen, aufstellen und nutzen
4. Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen
5. Ausblick

Algebra – das Wichtigste im Überblick

Jobs der Lehrkräfte

Verstehensgrundlagen identifizieren

Was sind die wichtigsten Inhalte und Vorstellungen für Lernende?

Verstehensgrundlagen diagnostizieren

Wie findet man heraus, was davon die Lernenden gut verstehen und wo es Probleme gibt?

Verstehensgrundlagen fördern

Wie lässt sich das nötige Verständnis aufbauen?

Was bedeutet das für die Erarbeitung der Algebra?

Prinzipien für nachhaltiges Lernen

Langfristigkeit statt Kurzfristigkeit

Verstehens-orientierung

Diagnosegeleitetheit

Kommunikations-förderung

Ausblick: Material, das bald zur Verfügung steht

Für Lernende:

- Diagnostik (SMART-Tests)
- Erklär-Videos mit Übungsaufgaben (voraussichtlich Jan 23 – Jun 23)
- Unterrichtsmaterial inklusive Apps (voraussichtlich Jun 23)

Für Lehrkräfte:

- Handreichungsmaterial (u. a. Videos) (Veröffentlichung zeitgleich mit Videos)
- Selbstlernmodul (voraussichtlich Jul 23)

Sie möchten **SMART** ausprobieren?

Dann nehmen Sie an unserer Vorstudie im Herbst 2022 teil!

Voraussetzung

Teilnahme mit einer **7./8. Klasse** während einer Unterrichtseinheit zum Thema **„Variablen und Terme“**

Interesse geweckt?

Informieren Sie sich hier:
smart.dzlm.de

Klasse 9/10: Wiederholungsbausteine

Diagnose- und Fördermaterial für den differenzierten Mathematikunterricht mit Jugendlichen

Ihre Herausforderung

- Haben Ihre Schülerinnen und Schüler auch Wiederholungsbedarf bei den Basics, obwohl sie sie schon mal konnten?
- Suchen Sie Material für die selbständigen Lernzeiten?
- Haben alle Lernenden unterschiedliche Bedarfe, und Sie möchten individualisierten Unterricht gestalten, aber ohne selbst alle Materialien zu erstellen?

Unser Angebot

Dann hilft Ihnen dieses Diagnose- und Fördermaterial zum selbständigen Wiederholen der Basics, die sogenannten Wiederholungsbausteine der Mathewerkstatt.
Sie sind zusammen mit jedem Schulbuch einsetzbar sind und fokussieren besonders das Verständnis der mathematischen Konzepte. Sie verfolgen die didaktischen Prinzipien Verstehensorientierung, Diagnosegeleitetheit und Individualisierung.

Angesprochene Zielgruppe

Das Material richtet sich an die Klassen 9/10 aller nicht-gymnasialen Schulformen und die Klassen der Berufskollegs (Ausbildungsvorbereitung, Berufsfachschule 1 und 2, Höhere Handelsschule, ggf. auch Fachoberschule).

Die Autorinnen und Autoren

bestanden aus einem großen Team an mathematikdidaktisch erfahren Lehrkräften und Fortbildenden sowie den Herausgebenden Bärbel Barzel, Timo Leuders, Stephan Hußmann und Susanne Prediger.

Wiederholungsbausteine zum Selbstlernen

Inhalte des Diagnose- und Fördermaterials

Inhalt des Teil 1: Arithmetik – Terme - Statistik

- A Größen Schätzen und überschlagen
- B Einheiten umrechnen
- C Dezimalzahlen ordnen und mit ihnen rechnen
- D mit proportionalen Zusammenhägen rechnen
- E flexibel mit Prozenten rechnen
- F flexibel mit Zinsen rechnen
- G mit Variablen veränderliche Zahlen erfassen
- H Terme zu Situationen finden und umgekehrt
- I Diagramme erstellen und interpretieren
- J statistische Kenngrößen bestimmen und interpretieren
- K Wahrscheinlichkeiten bestimmen

Inhalt des Teil 2: Funktionen – Gleichungen – Geometrie

- L Funktionale Zusammenhänge untersuchen
- M Bei Funktionen zwischen Graph, Situation und Tabelle wechseln
- N Lineare Funktionen beschreiben und bestimmen
- O Mit linearen Zusammenhängen umgehen
- P Gleichungen aufstellen und mit Tabelle und Graph lösen
- Q Gleichungen durch Umformen lösen
- R Umfang und Flächeninhalt von Figuren bestimmen
- S Volumen und Oberflächeninhalt von Körpern bestimmen
- T Mit Strahlensatz und Pythagoras Längen bestimmen
- U In Körpern mehrschrittige Probleme bearbeiten

Quelle

Erschienen beim Cornelsen-Verlag, Ladenpreis je 10 €, ISBN 978-3-06-040261-8 und 978-3060402625

Cornelsen

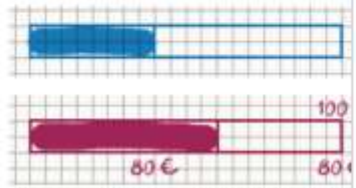
Selbständiges Arbeiten mit vier Elementen der Wiederholungsbausteine

Überprüfen E — Kann ich flexibel mit Prozenten rechnen?

1 Prozente und Brüche darstellen

a) Wie viel Prozent der Streifen sind ungefähr markiert?

b) Wie viel Prozent sind ungefähr...?
Zeichne an einem Prozentstreifen ein.
(1) $\frac{4}{5}$ (2) 16€ von 80€



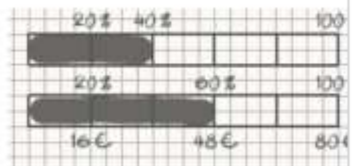
Überprüfen
Hier kannst du überprüfen, ob du die Inhalte der Aufgaben schon kannst. Lies dir die Aufgaben gründlich durch und bearbeite sie dann.

Erinnern E — So kann man flexibel mit Prozenten rechnen

Vergleiche deine Lösungen aus Überprüfen mit diesen Lösungsbeispielen aus Erinnern.
Entscheide dann, welchen Wiederholen-Teil du bearbeiten musst.

1 Prozente und Brüche darstellen

Streifen kann man in gleich große Teile teilen, z. B.
$\frac{1}{5} = 20\,\%$, $\frac{2}{5} = 40\,\%$, $\frac{3}{5} = 60\,\%$ und $\frac{4}{5} = 80\,\%$
48€ von 80€ sind $\frac{48}{80} = \frac{3}{5} = 60\,\%$ und $\frac{16}{80}$ sind 20 %



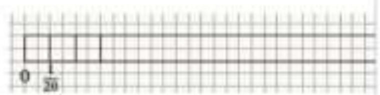
Erinnern
Hier vergleichst du deine Lösungen mit einer Musterlösung. Dies hilft dir, dich an die Inhalte zu erinnern. Entscheide dann, was du wiederholen musst.

Wiederholen E — Flexibel mit Prozenten rechnen

1 Prozente und Brüche darstellen

1.1 Prozente erklären und Prozentstreifen beschriften

a) Zeichne einen Streifen, der 40 Kästchen lang ist
und zeichne ein: $\frac{1}{20}, \frac{2}{20}, \frac{3}{20}, \ldots$
Welche Prozentzahlen gehören dazu?
Orientiere dich am Beispiel von Erinnern 1 auf Seite 42.

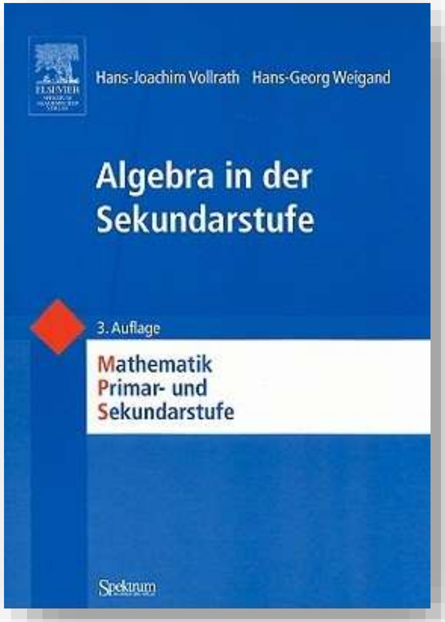


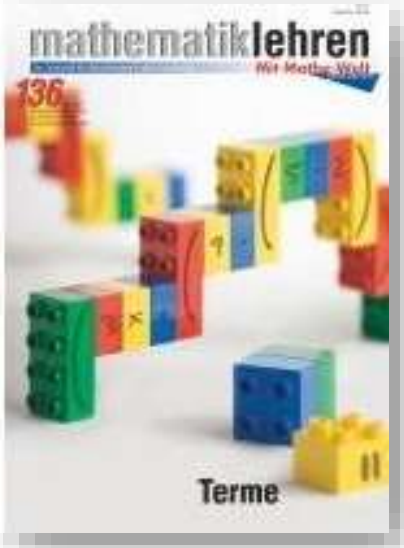
b) Zeichne einen Prozentstreifen. Stelle dir vor, es ist der Download-Balken eines Films mit 800 MB.
Beschrifte den Streifen mit passenden Prozentwerten, die schon heruntergeladen sind:
20 % , 40 % , 60 % , 80 %, 100 %
Orientiere dich am Beispiel von Erinnern 1 auf Seite 42.

Wiederholen
Hier findest du zu jeder Aufgabe aus dem Überprüfen weitere Aufgaben zum Wiederholen. Dies hilft dir, die Inhalte aus dem Erinnern intensiv durchzuarbeiten.

Literatur


Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II
Bärbel Barzel
Matthias Glade
Marcel Klinger
Algebra und Funktionen
Fachlich und fachdidaktisch
Springer Spektrum


Hans-Joachim Vollrath Hans-Georg Weigand
Algebra in der Sekundarstufe
3. Auflage
Mathematik Primar- und Sekundarstufe
Spektrum


mathematik lehren
136
Terme


mathematik lehren
169
MatheWelt
Gleichungen verstehen


mathematik lehren
202
MatheWelt
digital
Algebra
Strukturen erkennen und nutzen


mathematik lehren
224
MatheWelt
Visualisierungen als Arbeitsmittel

Literatur

- Abdullah, L. M. (2007). Procedural knowledge in the presence of a computer algebra system (CAS): rating the drawbacks using a multi-factorial evaluation approach. *International Journal for Technology in Mathematics Education*, *14*(1), 14–20.
- Affolter, W. et al.: *Das Mathematikbuch*, 8. Schuljahr. Berner Lehrmittel- und Medienverlag.
- Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen.* Springer Spektrum.
- Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *Mathematik Lehren*, *169*, 2–7.
- Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2017). Strukturen als Basis der Algebra. *Mathematik Lehren, 202,* 2– 8.
- Barzel, B. & Hußmann, S. (2008). Schlüssel zu Variable, Term und Formel. In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan & A. Fischer (Hrsg.), *Entwicklung des algebraischen Denkens. Festschrift zum 60. Geburtstag von Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 6–17). Franzbecker.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013). *Mathewerkstatt 6.* Cornelsen.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2014). *Mathewerkstatt 7.* Cornelsen.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Mathewerkstatt 8.* Cornelsen.
- Blomberg, J. (2016). *Aufbau eines nachhaltigen Term- und Variablenkonzepts. Ergänzungen zum schulinternen Lehrplan G8*. QUA-LiS NRW.
- Blomberg, J. & Abshagen, M. (2017): Fit in Algebra? Mach den smart-Test! *Mathe-Welt* (202), Friedrich Verlag.
- Blomberg, J. & Marxer, M. (2017). Wie aus Zahlen Variablen werden. Oder: Verstehen, wie man verallgemeinert. *Mathematik Lehren*, (202), 14–19.
- Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (2010). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen.

Literatur

- Cuoco, A. & Levasseur, K. (2003). Classical mathematics in the age of CAS. In A. Cuoco et al. (Hrsg.), *Computer Algebra Systems in Secondary School Mathematics* (S. 97-116). NCTM.
- Eigel, S. (2011). Nicht nur das Ergebnis prüfen. Aus Fehlern in Gleichungen lernen. *Mathematik lehren, 169,* 46–48.
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52*(33), 1–7.
- Kieran, C. & Drijvers, P. (2006). The co-emergence of machine techniques, paper-and-pencil techniques, and theoretical reflection: A study of CAS use in secondary school algebra*. International Journal of Computers for Mathematical Learning, 11*(2), 205-263.
- Leuders, T. (2012). Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In W. Blum (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (6., S. 81–95). Cornelsen.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg. Wiesbaden.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213–234). Beltz.
- Prediger, S., Barzel, B. , Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren*, 164, 2–9.
- Prediger, S. & Zwetschler, L. (2013). Topic-specific design research with a focus on learning processes: The case of understanding algebraic equivalence in grade 8. In T. Plomp, & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research – Part B: Illustrative cases* (S. 407–424). SLO.

Literatur

- Vollrath, H. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. BI-Wissenschaftsverlag.
- Vollrath, H.J., Weigand, H.G. (2009). *Algebra in der Sekundarstufe. (*3. Aufl.). Spektrum.
- Zeller, M. & Barzel, B. (2010). Influences of CAS and GC in early algebra. *ZDM, 42*(7), 775-788.
- Zwetzschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen: Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse*. Springer.

Bildquellen

- Folie 15 (Ente): https://pixabay.com/de/vectors/gummi-ente-quietschend-baden-156597/
- Folie 16 (Ente): Bild 1 (Ente): https://pixabay.com/de/vectors/gummi-ente-quietschend-baden-156597/
- Folie 16 (Fahrrad & Dreirad): https://pixabay.com/de/vectors/fahrrad-dreirad-tandem-fahrrad-6176456/
- Folie 16 (Ranunkel): https://pixabay.com/de/photos/ranunkel-blume-blüte-frühling-4973314/
- Folie 16 (Lavendel): https://pixabay.com/de/photos/lavendel-blumen-pflanzen-feld-1117275/
- Folie 38 (Fenster links außen): https://pixabay.com/de/photos/fenster-gebäude-heimat-haus-6800397/
- Folie 38 (Fenster links Mitte): https://pixabay.com/de/photos/fenster-aussparung-wolken-1876839/
- Folie 38 (Fenster rechts Mitte): https://pixabay.com/de/photos/haus-landhaus-außen-fassade-1158139/
- Folie 38 (Fenster rechts außen): https://pixabay.com/de/photos/architektur-gebäude-beton-türen-1869681/

Eine gute Reise mit der Algebra!

Evaluation

https://umfrage.hu-berlin.de/index.php/333521?lang=de-informal.

Wie stehen Ihnen jederzeit für Rückfragen zur Verfügung!

Bärbel Barzel, Tobias Domokos, Anika Dreher, Marita Friesen, Lars Holzäpfel, Macarena Larrain, Lukas Weith