

## Förderbaustein 1

# Kardinale Zahlbeziehungen (er-)kennen: Zahlzerlegungen und Zahlzusammen- setzungen verstehen und systematisch betrachten (ZR 20)

Lena Maiß, Franziska Tilke & Karina Höveler

Unter Beratung von Samira Cormann, Lara Marie Graf, Uta Häsel-Weide,  
Marcus Nührenbörger, Alissa Werner & Inga Wienhues

Juni 2023



Dieses Material wurde von Lena Maiß, Franziska Tilke & Karina Höveler unter Beratung von: Samira Cormann, Lara Marie Graf, Uta Häsel-Weide, Marcus Nührenbörger, Inga Wienhues & Alissa Werner entwickelt. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

### Zitierbar als

Maiß, L., Tilke, F. & Höveler, K. (2023). Ablösung vom zählenden Rechnen (1) Kardinale Zahlbeziehungen (er-)kennen: Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen verstehen und systematisch betrachten (ZR 20). Open Educational Resources.

### Projektherkunft

Dieser Förderbaustein wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet und wird auch im Projekt QuaMath weiter genutzt (beide Projekte gemeinsam von den Ländern finanziert).

### Hinweis zu verwandtem Material

Förder- und Diagnosematerial zu diesen Themen:

- (1) Kardinale Zahlbeziehungen (er-)kennen: Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen verstehen und systematisch betrachten (ZR 20)
- (2) Kardinale Zahlbeziehungen (er-)kennen: Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen automatisieren und produktiv üben (ZR 20)
- (3) Anzahlen strukturiert darstellen und erfassen (ZR 20)
- (4) Einfache Aufgaben der Addition und Subtraktion (ZR 20)
- (5) Anzahlen strukturiert darstellen und erfassen (ZR 100)
- (6) Einfache Aufgaben der Addition und Subtraktion (ZR 100)

# 1 Kardinale Zahlbeziehungen (er-)kennen: Zahlzerlegungen und -zusammensetzungen verstehen und systematisch betrachten (ZR 20)

*„Wer sieben als ‚fünf und zwei‘ denkt, wird von diesen sieben auch fünf (oder zwei) wegdenken bzw. fünf und zwei zusammendenken können.“ (Gaidoschik, 2019, 40)*

In diesem Baustein geht es darum, dass die Lernenden kardinale Zahlbeziehungen verstehen, konkret, dass sich Zahlen als Mengen zerlegen und zusammensetzen lassen (Teil-Ganzes-Verständnis) und Zahlen in Relation zueinander deuten können (Relationale Zahlvorstellung).

Zur Bedeutung: Lernende, die verfestigt zählen, verfügen oftmals über eine eingeschränkte (meist ordinale) Zahlvorstellung. Betrachten wir die Aufgabe  $26 + 25$ : Lernende, die verfestigt zählen, ermitteln das Ergebnis häufig durch Weiterzählen (27, 28, ..., 51), statt beispielsweise 26 in „25 und 1“ zu zerlegen und die Aufgabe über Rückgriff auf die einfache Verdoppelungsaufgabe  $25 + 25$  oder aber über eine Zerlegung in Zehner und Einer ( $20 + 20$  und  $6 + 5$ ) zu lösen. Diesen Lernenden fehlt oftmals die Erkenntnis, dass sich Zahlen in andere Zahlen zerlegen bzw. aus ihnen zusammensetzen lassen. Eine kardinale Zahlvorstellung und besonders die Vorstellung, dass sich Zahlen in andere Zahlen zerlegen bzw. aus ihnen zusammensetzen lassen, ist eine wesentliche Grundlage, um nicht-zählende Rechenstrategien zu erarbeiten. Das Teil-Ganzes-Verständnis ermöglicht es den Lernenden, vielseitige Zahlbeziehungen zu erkennen, die im weiteren Lernprozess die Grundlage für Rechen- und Ableitungsstrategien bilden.

Das Teil-Ganzes-Verständnis umfasst die Einsicht, dass ein Ganzes auf unterschiedliche Weise in Teile zerlegt werden kann und sich aus Teilen zusammensetzt.

Grundlegend dafür sind:

- (1) das Verständnis von Zahlen als Mengen,
- (2) die Erkenntnis, dass eine Menge (das Ganze) in zwei oder mehr gleich bzw. unterschiedlich große Teilmengen zerlegt werden kann und die Teilmengen zusammengesetzt wieder das Ganze ergeben,
- (3) die Erkenntnis, dass sich das Ganze nicht verändert, wenn nichts weggenommen oder dazu getan wird, sowie, dass sich das Ganze verändert, wenn nur ein Teil verändert wird.

Wesentlich im Lernprozess ist, dass die Lernenden Beziehungen zwischen Zahlen verstehen und systematisieren, indem sie Zahlen zerlegen (Teil-Ganzes-Konzept) (vorliegender Baustein). Anschließend ist es von zentraler Bedeutung, die Zahlzerlegungen der Zahlen bis 10 zu automatisieren, um diese dann zum nicht-zählenden Rechnen zu nutzen, welches jedoch explizit nicht mit diesem Baustein angestrebt wird. Zur Vertiefung, Automatisierung und zum produktiven Üben finden Sie weitere Anregungen im Modul „Ablösung vom zählenden Rechnen“, Diagnose- und Förderbaustein 2 „Zahlzerlegungen und Zahlzusammensetzungen automatisieren und produktiv üben (ZR20)“, die Verstehensgrundlagen werden dazu in diesem Baustein bereits angebahnt.

## Sprech- und Schreibweisen

Es gibt zahlreiche Möglichkeiten Zahlzerlegungen zu versprachlichen und zu notieren, beispielsweise in Zahlenhäusern oder mit der Hütchenschreibweise (s. Abb. 1). Wichtig ist bei allen Notationsformen eine verbal-sprachliche Begleitung, in der die strukturellen Merkmale (Teil-Ganzes-Beziehungen) nochmals hervorgehoben werden. Zudem sollten Bezüge zu Vorstellungsbildern oder Handlungen hergestellt werden z. B. „Ich zerlege 8 Plättchen in 5 Plättchen und 3 Plättchen.“ Weitere Informationen zur sprachlichen Begleitung des Zerlegens sind bei PIKAS (<https://pikas.dzlm.de/node/1303>) zu finden.

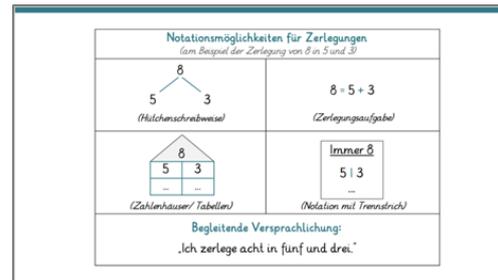


Abbildung 1 Notationsmöglichkeiten für Zerlegungen

## Hinweise zur Arbeit mit diesem Förderbaustein

- Die Aufgaben sind so angelegt, dass die Kinder sowohl in homogenen als auch heterogenen Gruppen arbeiten können.
- Bewusst werden in diesem Baustein Materialien und insbesondere Darstellungsweisen (Fingerbilder, Punktebilder und Hütchenschreibweise) immer wiederkehrend in den jeweiligen Aktivitäten verwendet.
- Das aufgeführte Material finden Sie in DZLM\_DiFiPrim\_AblZaelendRechnen\_BS1\_Zahlbeziehungen\_AM.
- Bei einigen Diagnose- und Förderideen bietet es sich an Forschermittel zu nutzen, um die Entdeckungen, die sie in einigen Diagnose- und Förderideen machen, darzustellen.



*Hinweis: Forschermittel stellen ein sinnvolles didaktisches Mittel dar, um Kindern auch ohne vollständig ausgebildete Lese- und insbesondere Schreibkompetenz dabei zu unterstützen, die eigenen Auffälligkeiten zu markieren und darzustellen. Allerdings ist es obligatorisch, dass die Kinder mit diesen Forschermitteln vertraut sind. Es bedarf hier also einer gesonderten Einführung. Hinweise finden Sie bspw. hierzu auf: <https://pikas.dzlm.de/fortbildung/forschermittel>.*



## Arbeit mit dem Lernvideo (Zahlen zerlegen)

Das Zerlegen von Mengen in Teilmengen kann ergänzend auch mit dem interaktiven Lernvideo *Zahlen zerlegen* gefördert werden. Das Video schlägt hierfür die Zerlegungen mithilfe von Fingerbildern und der symbolischen Schreibweise der Hütchendarstellung vor. Sollten im Unterricht andere Darstellungsmittel genutzt werden, sollte dies vorab mit den Kindern besprochen werden.

Beim Einsatz des Videos sind folgende Aspekte zu beachten:

- Die Aufgaben sind kooperativ angelegt und können nicht in Einzelarbeit bearbeitet werden. Die Lernenden sollten daher in Zweiergruppen arbeiten.

- Die Verbalisierung der genutzten Strukturen ist ein wesentlicher Teilschritt im Lernprozess. Auch bei einer digitalen Bearbeitung im Lernvideo sollte daher darauf geachtet werden, dass die Kinder Fragen wie „Haben Mila und Vlad alle Zerlegungen gefunden? Erklärt.“, „Was meinen die Kinder? Erklärt.“, etc. nicht einfach überspringen, sondern ihre Entdeckungen stets versprachlichen.
- Die vorgeschlagenen Beobachtungsmöglichkeiten sind gleichermaßen für die digitale Bearbeitung geeignet.

**Leitideen zur verständnisbasierten mathematischen Förderung:****diagnosegeleitet & differenzsensibel**

Bei der Arbeit mit den Diagnose-Förder-Bausteinen ist es nicht notwendig und zielführend, alle Aufgaben nacheinander zu bearbeiten. Die Förderung sollte an die Lernvoraussetzungen und -entwicklungen der Kinder adaptiv angepasst werden. Dazu bieten die Diagnose-Förderideen verschiedene Gesprächsanlässe und Beobachtungsmöglichkeiten, um während der Förderung Einblicke in die mathematischen Entwicklungen, Denkweisen und Schwierigkeiten der Lernenden zu erhalten. Diese prozessbegleitenden Erkenntnisse ermöglicht die Festlegung und Adaption von Förderzielen sowie die differenzsensible Anpassung der Fördermaßnahmen an die individuellen Lernprozesse und -entwicklungen. Diagnose und Förderung sind kontinuierlich miteinander verbunden.

**verstehensorientiert & beziehungsreich**

Das reine Auswendiglernen von Inhalten ist keine tragfähige Grundlage für den weiteren Mathematikunterricht. Daher fokussieren die Diagnose-Förder-Bausteine die zentralen mathematischen Inhalte zu Zahlen und Operationen und fördern den Aufbau eines inhaltlichen Verständnisses. Die Lerninhalte im Mathematikunterricht bauen aufeinander auf. Daher ist es zentral, die Vorstellungen der Lernenden aufzugreifen und (weiter) zu entwickeln, um auf diese Weise ein langfristiges, nachhaltiges mathematisches Lernen und Denken zu unterstützen (verstehensorientiert). In den Diagnose-Förderideen werden verschiedene Muster und Strukturen in den Blick genommen. Um Inhalte zu vernetzen und operative Beziehungen zwischen Aufgaben zu entdecken und zu nutzen, ist es wichtig, dass die Kinder immer wieder angeleitet werden, die Beziehungen zwischen den Zahlen und Aufgaben in den Blick zu nehmen und nicht Aufgabe für Aufgabe isoliert nebeneinander zu betrachten. Erst wenn das inhaltliche Verständnis gesichert ist, sollten Inhalte automatisiert werden.

**kooperativ & sprachsensibel**

Mathematisches Verständnis entwickelt sich im Gespräch – daher sind die Diagnose-Förder-Bausteine nicht zur Einzelarbeit im Wochenplan geeignet, sondern benötigen den Austausch der Lernenden untereinander und gezielte Impulse der Lehrkräfte. Die Diagnose-Förderideen bieten kooperative Aufgaben und verschiedene Impulse als Gesprächsanlässe. In mathematischen Gesprächen über Entdeckungen, Darstellungen, Lösungsprozesse und Begründungen lernen die Kinder nicht nur andere Sichtweisen kennen, sondern auch alternative Wege zum zählenden Rechnen, und vertiefen ihr eigenes Verständnis. Viele Kinder benötigen zum Beschreiben von Zusammenhängen und Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben sprachsensibile Unterstützung. Sprachliche Handlungen der Lehrkraft, Forschermittel und Wortsammlungen können die Lernenden hierbei unterstützen.

**darstellungssensibel & nachhaltig**

Zum Aufbau von grundlegenden, tragfähigen Vorstellungen über Zahlen, Operationen und mathematische Zusammenhänge ist der Einsatz und die Vernetzung von Darstellungen zentral. Das bedeutet, dass bei der Förderung die Handlung mit Material, die bildliche Darstellung, die Sprache und die mathematischen Symbole zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Dafür reicht es nicht aus, wenn die Kinder in den Diagnose-Förderideen nur am Material handeln, auch bei symbolischen Aufgaben sollten die Lernenden mentale Vorstellungen abrufen und erklären können („Wie stellst du dir die Zahl 8 / die Aufgabe  $4 + 4$  im Kopf vor?“). Die Materialien sollten mit der mentalen Vorstellung übereinstimmen, mathematisch strukturiert (z. B. 5er-, 10er-Bündelung) sowie in verschiedenen Zahlräumen einsetzbar sein und zählendes Rechnen vermeiden. Die Strukturnutzung der Materialien (z. B. beim Zwanzigerfeld) und die Vernetzung der Darstellungen geschehen nicht automatisch, sondern bedürfen der gezielten Anregung durch die Lehrkraft – hierzu bieten die Diagnose-Förder-Bausteine verschiedene Anlässe.

## 2 Diagnose und Förderideen

### 1 Mengen zerlegen

Die Aktivität „Mengen zerlegen“ beruht auf der Förderidee „Immer 7“ von Häsel-Weide, Nührenböcker, Moser Opitz und Wittich (2017, 62 ff.), alle Inhalte sind urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte, einschließlich der Vervielfältigung, Veröffentlichung, Bearbeitung und Übersetzung, bleiben Häsel-Weide, Nührenböcker, Moser Opitz und Wittich vorbehalten.

**Ziel:** Die Lernenden können eine Menge auf unterschiedliche Art und Weise in Teilmengen zerlegen und verstehen, dass die Ausgangsmenge gleich bleibt (Teil-Ganzes-Zerlegung).

#### Einführung

In der Aktivität „Immer 7“ geht es darum, zu einer Menge unterschiedliche Zerlegungen zu finden. Wesentlich ist, dass den Kindern einerseits bewusst wird, dass sich ein und dieselbe Menge auf unterschiedliche Weise zerlegen lässt (bspw. in 2, 3 oder 4 Teilmengen) und andererseits eine benannte Zerlegung unterschiedlich in die Menge hineingedeutet werden kann.

Die Einführung zielt darauf, diese Aktivität vorzubereiten. Vorausgesetzt wird dabei, dass die Kinder bereits ein Verständnis des Begriffs „Zerlegen“ haben<sup>1</sup>. Die Lehrkraft präsentiert 7 Punkte in Form eines Musters an der Tafel / dem Smartboard / der Wand (s. Abb. 2) und fragt: „Wie viele Punkte seht ihr? Wie seid ihr vorgegangen?“ Eine mögliche Kinderantwort wäre: „Ich sehe 7 Punkte“ oder „Ich sehe 7 Punkte: oben 4 und unten 3 Punkte“. Ein anderes Kind wird anschließend beauftragt, an der Tafel / dem Smartboard die verbalisierte Zerlegung zu notieren und passende Teilmengen zu umkreisen. Die Äußerung einer Mitschülerin bzw. eines Mitschülers, was einzukreisen ist, kann mehrdeutig sein. Dies bietet Anlass, um im Klassengespräch zu erarbeiten, dass sich eine Zerlegung verschieden darstellen lässt. Nachdem die erste Zerlegung notiert wurde, hängt die Lehrkraft das identische Muster erneut an. Es werden weitere Zerlegungsmöglichkeiten an der Tafel gesammelt.

#### Arbeitsphase

In einer Partnerarbeit erhält jedes Kinderpaar Streifen mit gleichen Mustern (s. Abb. 3). Zunächst erhalten die Kinder Muster mit immer 6 Elementen, später auch Muster mit immer 7 bzw. immer 8 Elementen. Streifenweise beschreibt Kind 1 jeweils drei Zerlegungen, die es in dem Muster sieht, und Kind 2 umkreist und notiert die beschriebenen Zerlegungen. Wichtig ist, dass Kind 1 die Zerlegung verbalisiert und diese nicht am Bild zeigt. Wenn Kind 2 andere als die intendierten Plättchen umkreist, bietet dies Anlass über die verschiedenen Sichtweisen zu sprechen.

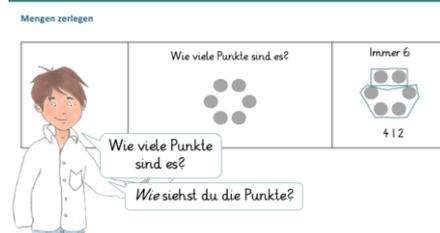


Abbildung 2: Tafelbild Einstieg „Mengen zerlegen“, Zeichnung: C. Bendler



Abbildung 3: Aktivität „Mengen zerlegen“, Zeichnungen: C. Bendler

<sup>1</sup> Bei PIKAS finden Sie Anregungen dazu, wie sie den Zerlegungsbegriff erarbeiten können: [https://pikas-kompakt.dzlm.de/sites/pikaskp/files/uploads/08-ZahlvorstellungenAnfangsunterricht/zahlvanf\\_zahlzerlegung.pdf](https://pikas-kompakt.dzlm.de/sites/pikaskp/files/uploads/08-ZahlvorstellungenAnfangsunterricht/zahlvanf_zahlzerlegung.pdf).

**Impulse**

- Wie hast du das Muster zerlegt? Welche Teile siehst du?
- Passt deine Beschreibung zu den Punktemengen, die dein/e Partner/in eingekreist hat? Warum? – Warum nicht?
- Kann man die Zerlegung auch noch anders in dem Muster sehen? Wie?

**Beobachtungsmöglichkeiten**

- Welche Zerlegungen findet das Kind?
- Kann das Kind eine beschriebene Zerlegung auf unterschiedliche Weise in das Muster hineindeuten?
- Wie bestimmt das Kind Teilmengen im Muster: Zählt es die Teilmengen einzeln aus oder erfasst es die Teilmengen auf einen Blick?

**Weiterführender Gesprächsanlass**

Anknüpfend an die Arbeitsphase sollten verschiedene Zerlegungen der Lernenden noch einmal gemeinsam betrachtet und Besonderheiten diskutiert werden (siehe unten). An der Tafel / dem Smartboard / der Wand präsentieren die Kinder ihre Zerlegungen für alle sichtbar. Gemeinsam werden Besonderheiten der Zerlegungen diskutiert.

Mögliche Diskussionsanlässe:

**(1) Unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten von Zerlegungen**

Es werden zwei Zerlegungen rausgegriffen, bei denen die Zerlegung gleich benannt wurde, aber anders eingezeichnet wurde (s. Abb. 4, gelbe Zerlegungen: Es wurde zweimal in 4 und 3 zerlegt, aber unterschiedliche Punkte eingekreist). Es wird deutlich, dass dieselbe Zerlegung unterschiedlich dargestellt werden kann.

**(2) Kommutativität**

Es wird eine zeichnerische Zerlegung rausgegriffen, bei der zwei Kinder eine unterschiedliche Zerlegung erkennen (s. Abb. 4, orangene Zerlegungen: Es werden die gleichen 5 und 2 Punkte umkreist, aber das eine Kind sagt: „7 wurde in 5 und 2 zerlegt“ und das andere: „7 wurde in 2 und 5 zerlegt“.) In diesem Kontext kann diskutiert werden, aus welcher Perspektive auf die Muster geschaut wird, und es können erste Ideen zur Kommutativität entwickelt werden.

**(3) Zerlegungen in mehr als zwei Teile**

Es werden Zerlegungen rausgegriffen, in denen die Lernenden drei oder mehr Gruppen eingezeichnet haben (s. Abb. 4, blaue Zerlegungen).

**(4) Definition von Zerlegungen**

Anhand von unzulässigen Zerlegungen wie z. B. Überschneidungen und Auslassungen (s. Abb. 4, rote Zerlegungen), kann gemeinsam diskutiert werden, was eine Zerlegung eigentlich ausmacht. Bei einer Zerlegung wird die Gesamtmenge vollständig in Teilmengen zerlegt, jedes Element muss also in genau einer Teilmenge enthalten sein.

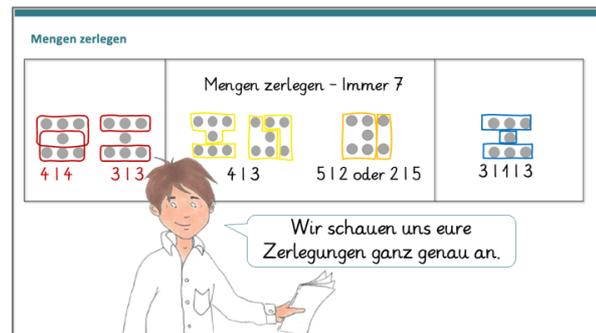


Abbildung 4: Tafelbild Reflexion „Mengen zerlegen“, Zeichnung: C. Bendler

**Darauf kommt es an:**

- *Nicht zählende Vorgehensweisen unterstützen:* In der Aktivität steht das schnelle Sehen nicht im Mittelpunkt, dennoch sollten die Kinder dazu angeregt werden, die Punkte nicht einzeln abzuzählen, sondern das Gesamtmuster in Gruppen von Punkten zu unterteilen, die auf einen Blick erfassbar sind. Wesentlich ist es dafür, für das Muster eine Plättchenanzahl im Zahlenraum von 5 bis etwa 10 zu wählen, so dass die Gesamtanzahl nicht direkt auf einen Blick erfasst werden kann, sie aber noch leicht in Teilmengen zerlegt und bestimmt werden kann. Impulse wie: „*Kannst du auch einige Punkte auf einen Blick erkennen?*“ oder „*Aus welchen Teilen setzt sich das Muster zusammen?*“ tragen dazu bei, die Punkte nicht einzeln abzuzählen.
- *Handlungsbegleitende Mathesprache:* Die Lehrkraft ermuntert die Kinder dabei ihre Zerlegung zu verbalisieren und begleitet selbst die Handlung sprachlich: „*Du zerlegst die 7 Plättchen in 5 und 2 Plättchen*“ oder „*Du hast entdeckt, dass sich die 7 Plättchen aus 4 und 3 Plättchen zusammensetzen*“. Die Versprachlichung „*Ich zerlege die x Plättchen in y und z Plättchen*“ sollen die Kinder auch in der Arbeits- und Reflexionsphase verwenden.

**Benötigtes Material**

Einführung	Arbeitsphase	Reflexion
Muster an der Tafel / dem Smartbord	AB Immer 6, Immer 7, Immer 8	Ergebnisse aus der Arbeitsphase

Aktivität in Anlehnung an Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2017). *Ablösung vom zählenden Rechnen* (Auflage 4). Kallmeyer in Verbindung mit Klett

## 2 Mengen zusammensetzen

**Ziel:** Die Lernenden können eine Menge auf unterschiedliche Art und Weise aus Teilmengen zusammensetzen.

Als Gegenoperation zum Zerlegen von Zahlen (siehe Aktivität 1: Mengen zerlegen) geht es in dieser Aktivität darum, dass die Kinder verstehen, dass sich Zahlen aus verschiedenen Zahlen zusammensetzen lassen, also kardinal gedacht: Dass sich eine Menge aus verschiedenen Teilmengen zusammensetzt.

### Einführung

Zur Vorbereitung der Aktivität „Zahlen zusammensetzen“ präsentiert die Lehrkraft die Aufgabe an der Tafel / dem Smartboard / der Wand (s. Abb. 5). Aufgabe ist es die Menge von 7 aus den gegebenen Teilmengen zusammensetzen. Die Lehrkraft erklärt: „Ihr sollt zu zweit mit den Punktebildern 7 Plättchen legen.“ Ein Kind beginnt und legt einen ersten Punktstreifen ins Feld. Dann ist das andere Kind an der Reihe und legt einen weiteren Streifen. Ihr wechselt euch so lange ab, bis 7 Plättchen in der Mitte liegen.“ Die Lehrkraft lässt ein Kinderpaar vormachen und ermutigt die Kinder währenddessen ihr Vorgehen zu verbalisieren (bspw. „3 Plättchen und 4 Plättchen, zusammen sind es 7 Plättchen“). In der Einführung sollten dabei exemplarisch verschiedene Zusammensetzungen der 7 thematisiert werden.

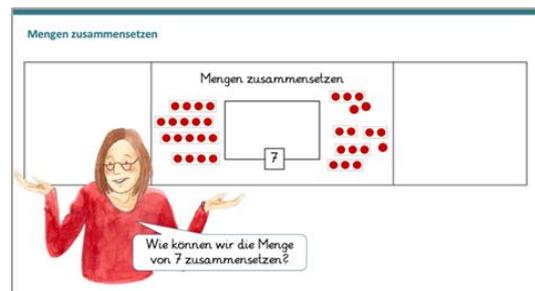


Abbildung 5: Tafelbild Einstieg „Mengen zusammensetzen“, Zeichnung: K. Mosen

### Arbeitsphase

Die Kinder erhalten Punktstreifen und ein Arbeitsblatt (s. Abb. 6), auf dem sie (wie in der Einführungsphase) in Partnerarbeit Anzahlen legen sollen. Es beginnt immer abwechselnd ein Kind damit, eine Menge ins Feld zu schieben, und das andere Kind ergänzt zur gewünschten Anzahl. Wichtig ist, dass die Kinder sich so lange abwechseln, bis die gegebene Anzahl erreicht ist, und das Kind, das den letzten Punktstreifen angelegt hat, die Zusammensetzung verbalisiert.

In Aufgabe 1 soll mehrfach dieselbe Anzahl dargestellt werden, so dass verschiedene Zusammensetzungen ein und derselben Menge gefunden werden müssen. Die Flexibilität von Zahlzerlegungen wird so in den Fokus gerückt. Bei Aufgabe 2 sollen die Kinder selbst eine Anzahl wählen und zusammensetzen. Dabei soll die Gesamtanzahl besonders schnell erkennbar sein. Dies bietet Anlass zu diskutieren, wann Anzahlen schnell erkennbar sind und warum.

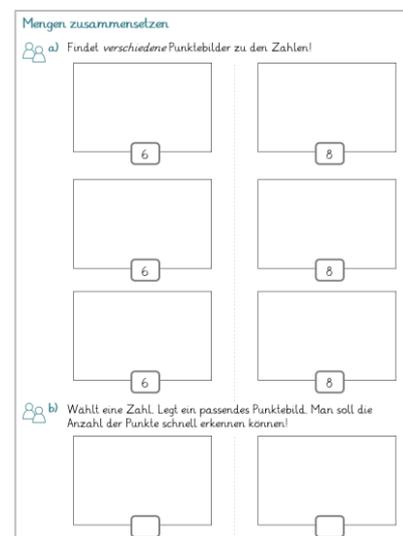


Abbildung 6: Arbeitsblatt "Mengen zusammensetzen"

**Impulse**

- Aus welchen Teilen kannst du die Anzahl zusammensetzen?
- Welche Teile erkennst du auf einen Blick, ohne zu zählen?
- Wie viele fehlen noch bis zur Gesamtanzahl?
- Wie bzw. warum hast du den Plättchenstreifen ausgewählt?

**Beobachtungsmöglichkeiten**

- Welche Teilmengen (Teilmengen mit 1 oder 5 Elementen, zwei gleiche Teilmengen) werden genutzt?
- Wie geht das Kind vor, um einen Plättchenstreifen auszuwählen?
- Wie geht das Kind vor, um einen fehlenden Streifen zu ergänzen?
- Nutzt das Kind vorherige Zusammensetzungen?

**Weiterführender Gesprächsanlass**

Im Plenum werden verschiedene Zahlzusammensetzungen verglichen. Die Lehrkraft notiert die Ziffer 6 an der Tafel / dem Smartboard und lässt zunächst ein Kinderpaar die Zahl zusammensetzen und ihr Vorgehen beschreiben. Im Anschluss entfernt die Lehrkraft die verbleibenden Einer und tauscht die Ziffer 6 gegen die 7 aus. „*Wie kann man geschickt die Zusammensetzung von der 6 nutzen, um 7 zu legen?*“ (s. Abb. 7). Dadurch, dass keine Einer mehr vorhanden sind, muss mindestens eine Menge ausgetauscht werden. Gemeinsam wird überlegt, ob es auch andere Wege gibt, aus der 6 eine 7 zu legen. Anschließend werden die Kinder gefragt, wie sie die Zusammensetzungen der Zahl 7 nutzen können, um die Zahl 9 zu bilden. Auch hierfür werden verschiedene Möglichkeiten thematisiert. Wichtig ist dabei auch hier die sprachliche Begleitung der Legehandlung: „*Ich setze 9 zusammen aus drei Dreiern*“.

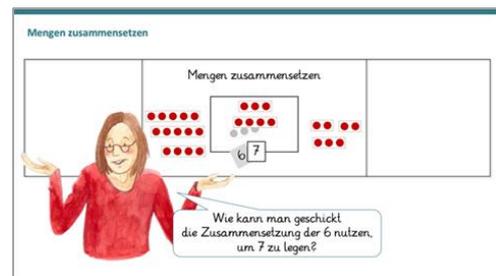


Abbildung 7: Tafelbild Reflexion „Mengen zusammensetzen“, Zeichnung: K. Mosen

**Darauf kommt es an:**

- *Nicht zählende Vorgehensweisen unterstützen:* Als Teilmengen werden den Kindern Mengen mit zwei bis fünf Elementen zur Verfügung gestellt, damit die Kinder die Mengen auf einen Blick, sprich ohne abzuzählen, erfassen können. Aus diesen Teilmengen soll dann die Gesamtmenge zusammengesetzt werden. Es stehen den Kindern bewusst nur wenige, einzelne Plättchen zur Verfügung, da die Kinder lernen sollen, nicht in Einerschritten zählend vorzugehen, sondern die Mengen aus Anzahlen zusammenzusetzen.
- *Handlungsbegleitende Mathesprache:* Die Lehrkraft ermuntert die Kinder, dabei ihre Zusammensetzungen zu verbalisieren und begleitet selbst die Handlung sprachlich: „*Ich setze 9 zusammen aus drei Dreiern*.“ Die Versprachlichung sollen die Kinder auch in der Arbeits- und Reflexionsphase verwenden.

**Benötigtes Material**

Einführung	Arbeitsphase	Reflexion
Punktstreifen an der Tafel / dem Smartboard	AB Zahlen zusammensetzen, Punktstreifen	Punktstreifen an der Tafel / dem Smartboard

Aktivität in Anlehnung an: Häsel-Weide, U., Nührenböcker, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2017). *Ablösung vom zählenden Rechnen* (Auflage 4). Kallmeyer in Verbindung mit Klett

### 3 Immer 5 – Finde verschiedene Türme

**Ziel:** Die Lernenden können zunehmend systematisch verschiedene Zerlegungen einer Menge in zwei Teilmengen finden und Beziehungen zwischen den Zerlegungen herstellen.

#### Einführung

Ziel der Aktivität Immer 5 ist es, eine Menge in zwei Teilmengen zu zerlegen und zusätzlich auf die Beziehung zwischen den Zahlzerlegungen zu schauen. Konkret werden aus einer Würfelmenge von 5 Würfeln zwei Türme gebaut, der entstehende Doppelturm stellt im Folgenden das Ganze dar, die zwei Türme jeweils eine Teilmenge.

Die Kinder treffen sich mit der Lehrkraft im Sitzkreis, in der Mitte liegen 5 Holzwürfel. Die Lehrkraft bittet ein Kind aus den Holzwürfeln zwei Türme zu bauen („Du hast 5 Würfel. Baue immer 2 Türme. Welche Doppeltürme kann du mit 5 Würfeln bauen?“). Die Lernenden sollten darauf hingewiesen werden, dass immer alle Würfel verwendet werden müssen, sprich, die Würfel sollen restlos verbaut werden. Anschließend darf ein anderes Kind den Doppelturm beschreiben: „Links sind 2 Würfel, rechts sind 3 Würfel, zusammen sind es 5 Würfel“. Danach fragt die Lehrkraft:

„Wie groß ist der Unterschied zwischen den zwei Türmen?“ Gemeinsam werden die beiden Türme verglichen. Anhand des Beispiels wird gemeinsam überlegt, wie sich der Doppelturm und die passenden Zerlegungen beschreiben und dokumentieren lassen (s. Abb. 8).

Gemeinsam wird die Frage aufgeworfen, ob alle Kinder sich diesen Doppelturm mit 5 Würfeln überlegt haben oder ob es noch weitere Doppeltürme aus 5 Würfeln geben kann. Mit dem Arbeitsauftrag („Welche Doppeltürme kannst du mit 5 Würfeln bauen?“) und entsprechenden Holzwürfeln werden die Lernenden in die Arbeitsphase geschickt.

#### Arbeitsphase

Die Kinder erhalten 5 Würfel und sollen in Partnerarbeit verschiedene Möglichkeiten finden, mit den Würfeln zwei Türme zu bauen. Haben sie den Doppelturm gebaut, soll der Unterschied zwischen den Türmen ermittelt werden: „Links sind 2 Würfel, rechts sind 3 Würfel, zusammen sind es 5 Würfel. Der Unterschied ist 1.“ Ein Kind beginnt und baut zwei Türme, das andere Kind beschreibt und dokumentiert die gefundene Möglichkeit (s. Abb. 9). Dann wird gewechselt. Die Kinder sind aufgefordert weitere Doppeltürme zu generieren und Zusammenhänge zwischen den Doppeltürmen zu entdecken und zu beschreiben („Wie kannst du aus einem Doppelturm einen anderen bauen?“).

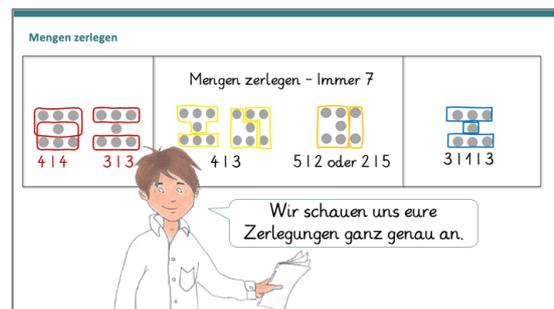


Abbildung 8: Tafelbild Einstieg „Immer 5“,

Zeichnung: C. Bendler



Abbildung 8: Tafelbild Einstieg „Immer 5“,

Zeichnung: C. Bendler

Die Aufgabe kann analog auch mit 6 oder mehr Würfeln durchgeführt werden. Geben Sie den Lernenden einen sechsten Würfel nachdem alle Doppeltürme mit 5 Würfeln gefunden wurden. Lassen Sie die Lernenden den sechsten Würfel zu einem bestehenden Doppelturm mit 5 Würfeln hinzufügen („Wie verändert sich die Gesamtmenge, wenn ich einen Turm erhöhe?“). Zur Dokumentation der Doppeltürme bieten sich bei mehr als 5 Würfeln Blankovorlagen mit eingezeichneter Fünferlinie an, damit die Lernenden nicht zum Abzählen verleitet werden.

### Impulse

- Wie kannst du aus einem Doppelturm einen anderen bauen?
- Was passiert, wenn du von dem einen Turm einen Würfel wegnimmst und ihn auf den anderen Turm legst?
- Versuche die gefundenen Doppeltürme zu sortieren. Hast du alle gefunden?
- Warum kann es keine weiteren Doppeltürme mehr geben?

### Beobachtungsmöglichkeiten

- Erstellt das Kind die Zerlegungen immer wieder neu? Oder kann es aus einer bekannten Zerlegung durch eine Umlegung bereits eine neue Zerlegung ableiten?
- Kann das Kind seine Handlungen am Material verbalisieren?
- Entdeckt das Kind Beziehungen zwischen den Zerlegungen? Kann es diese verbalisieren?

### Weiterführender Gesprächsanlass

In der Reflexion wird ein Kinderpaar gebeten, einen Doppelturm im Sitzkreis zu bauen. Zunächst werden die Lernenden gebeten, den Doppelturm zu beschreiben z. B. „Links sind 2 Würfel, rechts sind 3 Würfel, zusammen sind es 5 Würfel.“ Anschließend werden die Türme systematisch verändert. Zunächst fragt die Lehrkraft: „Was passiert, wenn ich einen Würfel umlege?“ Mögliche Beschreibungen der Kinder wären: „Im linken Turm wird es ein Würfel mehr, im rechten Turm wird es ein Würfel weniger“ oder „Ich lege vom rechten Turm einen Würfel auf den linken Turm. Aus dem Eins-Vierer-Doppelturm mache ich den Zwei-Dreier-Doppelturm“ (s. Abb. 10). Wichtig ist es, mit den Lernenden zu thematisieren, wie sich die Gesamtanzahl der Würfel durch das Umlegen verändert – hier bleibt die Anzahl aufgrund der gegensinnigen Veränderung gleich. Anschließend wird überlegt, wie man durch das Umlegen weitere Doppeltürme finden kann und warum, das Umlegen der Würfel helfen kann, alle Doppeltürme zu finden. Anhand der Aufgabe können darüber hinaus weitere Veränderungen thematisiert werden: z. B. Wie verändert sich die Höhe, wenn ich einen Würfel wegnehme/hinzufüge?



Abbildung 10: Beziehungen zwischen Zahlen verstehen, Zeichnung: C. Bendler

**Darauf kommt es an:**

- *Nicht zählende Vorgehensweisen unterstützen:* In der Aktivität wird bewusst eine kleine Menge an Würfeln verwendet. Sollten die Lernenden die Würfel trotzdem einzeln abzählen, sollten Sie die Kinder darauf aufmerksam machen, ob sie die Höhe der Würfel auch auf einen Blick erkennen können. Impulse wie: „Kannst du die Anzahl der Bausteine im linken Turm auf einen Blick erkennen?“ oder „Wie viele sind es dann im rechten Turm?“ tragen dazu bei, die Würfel nicht einzeln abzuzählen. (Achtung: Dies ist nur möglich, wenn die einzelnen Türme nicht aus mehr als 5 Holzwürfeln bestehen, denn nur Anzahlen bis 5 können auf einen Blick erfasst werden.)
- *Handlungsbegleitende Mathesprache:* Die Lehrkraft ermuntert die Kinder im Einstieg, in der Arbeitsphase und in der Reflexion ihre Zerlegung und auch die Veränderungen zu verbalisieren und begleitet selbst die Handlung sprachlich: „Der Doppelturm besteht aus 5 Würfeln. Im linken Turm sind 2 Würfel, im rechten Turm 3 Würfel.“
- *Beziehungen zwischen Zahlzerlegungen herstellen und beschreiben:* Der Einsatz der Holzwürfel eignet sich besonders gut, um Beziehungen zwischen den Zahlzerlegungen herzustellen und die Kinder beschreiben zu lassen. Hierzu eignen sich Impulse wie „Kannst du aus dem Doppelturm auch einen anderen Doppelturm machen?“ und „Wie verändert sich die Höhe, wenn ein Würfel umgelegt wird?“. Das systematische Vorgehen hilft den Lernenden auch bei späteren Aktivitäten und vermeidet das isolierte Lernen von Einzelfakten.

**Benötigtes Material**

Einführung	Arbeitsphase	Reflexion
Würfel	Würfel, Zettel zur Dokumentation der gefundenen Lösungen	Würfel

Aktivität in Anlehnung an: Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R. & Tubach, D. (2016). *Mit Zahlen spielen*. Klett, Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule*. Springer, Mathe inklusiv mit PIKAS (o. J., a). *Zahlvorstellungen. Aufgabenstellung kompakt „Zahlen zerlegen“*. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/634>, Mathe inklusiv mit PIKAS (o. J., b). *Zahlvorstellungen. Beziehungen herstellen*. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/123>.

## 4 Immer 10 – Finde alle Möglichkeiten!

**Ziel:** Die Lernenden können zunehmend systematisch (u. a. durch Ausnutzen von Zahlbeziehungen) verschiedene Zerlegungen einer Menge in zwei Teilmengen finden und anschließend alle Zerlegungen der Menge.

Als Gegenoperation zum Zerlegen von Zahlen (siehe Aktivität 1: Mengen zerlegen) geht es in dieser Aktivität darum, dass die Kinder verstehen, dass sich Zahlen aus verschiedenen Zahlen zusammensetzen lassen, also kardinal gedacht: Dass sich eine Menge aus verschiedenen Teilmengen zusammensetzt.

### Einführung

Die Aktivität Immer 10 hier im Kontext der Zerlegung von Punktemengen, kann grundsätzlich analog zu der Aktivität Immer 5 mit Türmen durchgeführt werden. Ziel ist es, eine Menge in zwei Teilmengen zu zerlegen und nun anknüpfend alle verschiedenen Zahlzerlegungen zu finden.

Grundsätzlich können auch hier verschiedene Anzahlen (Immer X) vorgegeben werden. Für das geschickte Rechnen sind später insbesondere Zerlegungen der 5 und der 10 von großer Bedeutung. Die Zerlegung der 5 wurde bereits in der vorherigen Aktivität erarbeitet, weshalb die 10 im Folgenden im Fokus steht. Weitere Übungen zur Zerlegung anderer Anzahlen können beliebig angeschlossen werden.

Die Lehrkraft präsentiert einen Punktestreifen an der Tafel / dem Smartboard / der Wand und fragt die Kinder: „Wie kann ich den Punktestreifen in zwei Teile zerlegen?“ (s. Abb. 11). Ein Kind wird nach vorne gebeten und markiert eine Zerlegung in zwei Teile (Zeigestab, Stift). Sofern den Lernenden der Begriff „Zerlegen“ noch nicht geläufig ist, sollte dies mit den Lernenden zuvor erarbeitet werden. Geeignete Aktivitäten dazu finden sie bei PIKAS<sup>2</sup>.

Anzunehmen ist, dass die Kinder im Plenum direkt verschiedene Zerlegungen finden und diese benennen. Die Lehrkraft sollte diese an der Tafel in Form der Zwischenstrichschreibweise notieren: „Ich zerlege 10 in 2 Plättchen und 8 Plättchen. Und notiere: 2 | 8.“ (s. Abb. 11). Diese Schreibweise bietet sich an, da sie platzsparend ist und so später die Zerlegungen besser sortiert und strukturiert werden können. Der Bezug zum Ganzen wird durch die Überschrift „Immer 10“ deutlich. Im Punktestreifen kann die Zerlegung mittels einer Markierung mit Forschermitteln z. B. farbiger Strich nachgezeichnet werden.

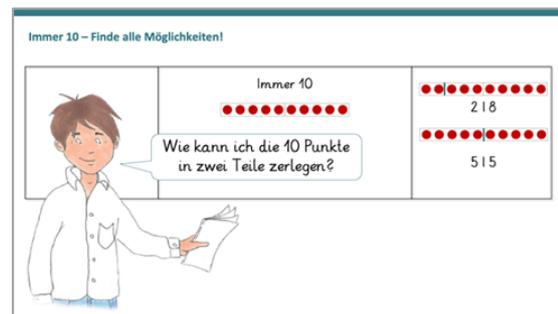


Abbildung 11: Tafelbild Einstieg "Immer 10",  
Zeichnung: C. Bendler

<sup>2</sup> [https://pikas-kompakt.dzlm.de/sites/pikaskp/files/uploads/08-ZahlvorstellungenAnfangsunterricht/zahlvanf\\_zahlzerlegung.pdf](https://pikas-kompakt.dzlm.de/sites/pikaskp/files/uploads/08-ZahlvorstellungenAnfangsunterricht/zahlvanf_zahlzerlegung.pdf)

## Arbeitsphase I

Die Lernenden erhalten zu zweit mehrere Punktestreifen mit jeweils 10 Punkten. Aufgabe der Lernenden ist es, verschiedene Möglichkeiten zu finden, den Punktestreifen in zwei Teile zu zerlegen. Abwechselnd zerlegt ein Kind einen Punktestreifen und markiert die Zerlegung. Die Kinder können dazu auch einen Stift als Trennlinie zwischen die Punkte legen. Das andere Kind beschreibt, in welche Teile die Gesamtmenge zerlegt wurde (z.B. „Du hast die 10 Punkte in 2 und 8 Punkte zerlegt.“) Die gefundenen Zerlegungen dokumentieren die Lernenden anschließend gemeinsam auf einem Blatt neben dem Punktestreifen. Dann werden die Rollen *gewechselt*. Während dieser Aktivität kommen bei den Lernenden vielleicht selbst zentrale Fragen wie „Zählen 2 und 8 sowie 8 und 2 als zwei verschiedene Zerlegungen?“ auf (s. Abb. 12).



Abbildung 12: Arbeitsphase, Zeichnungen: C. Bendler

### Impulse

- Wie hast du den Streifen zerlegt?  
In welche Teile?
- Zählen 2 und 8 sowie 8 und 2 als zwei verschiedene Zerlegungen? (Kommutativität)
- Ist 10 und 0 auch eine mögliche Zerlegung?
- Wie viele unterschiedliche Zerlegungen gibt es insgesamt zu der Zahl?

### Beobachtungsmöglichkeiten

- Zählt das Kind die Teilmengen Punkt für Punkt aus oder erfasst es mehrere Punkte auf einen Blick?
- Kann das Kind seine Handlungen am Material verbalisieren?
- Kann das Kind die Zerlegung dokumentieren?

## Weiterführender Gesprächsanlass I

An der Tafel werden zu dem Zehnerstreifen verschiedene Zerlegungen gesammelt und von den Lernenden beschrieben. Erste strukturelle Zusammenhänge können herausgearbeitet werden:

Diskussionen aus der Partnerarbeit, z. B. ob es sich bei „10 zerlegt in 8 und 2“ und „10 zerlegt in 2 und 8“ (s. Abb. 12) um zwei verschiedene Zerlegungen handelt, werden aufgegriffen. Dabei kann herausgearbeitet werden, dass die zwei Zerlegungen sehr wohl verschieden sind, diese aber durchaus in einem engen Zusammenhang stehen. Um zu verdeutlichen, wie die beiden Zerlegungen auseinander resultieren, kann eine Zerlegungen aus zwei verschiedenen Perspektiven betrachtet oder gedreht werden (s. Abb. 13). Dies bereitet bereits die Kommutativität der Addition vor.

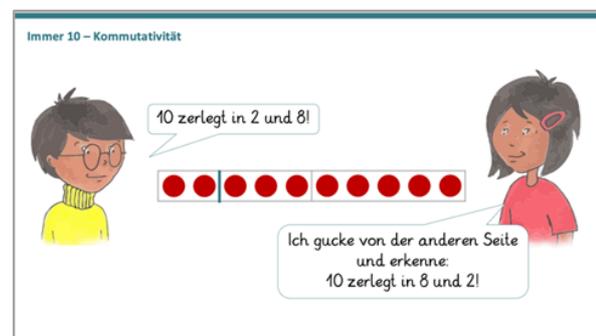


Abbildung 13: Kommutativität vorbereiten,  
Zeichnungen: C. Bendler

Aus der Aktivität heraus kann und wird oftmals die Frage auftauchen, ob alle Zahlzerlegungen zu einer Zahl gefunden wurden. Diese Frage wird im Anschluss aufgegriffen.

Im Folgenden werden die Arbeitsergebnisse aufgegriffen, um nun zunehmend systematisch alle Zerlegungen der Zahl 10 zu finden. Die Lehrkraft sammelt die gefundenen Zerlegungen an der Tafel / dem Smartboard / der Wand und wirft die Frage auf, ob dies alle Zerlegungen der 10 in zwei Teile sind (s. Abb. 14). Mit dieser Aufgabe werden die Lernenden in die Arbeitsphase II geschickt.

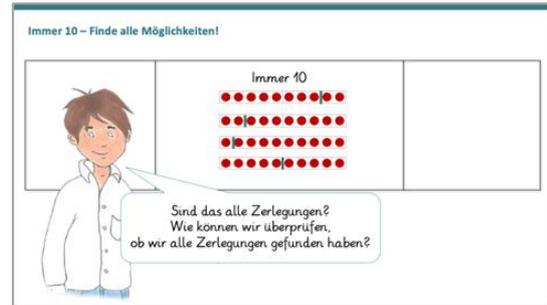


Abbildung 14: Einstieg Tafelbild "Immer 10",  
Zeichnungen: C. Bendler

## Arbeitsphase II

Die Lernenden arbeiten in Partnerarbeit mit ihren Zerlegungen weiter. Sie erhalten den Arbeitsauftrag: „Findet alle Zerlegungen der 10 in zwei Teile. Sortiert dazu eure Zerlegungen. Habt ihr alle Zerlegungen gefunden? Warum könnt ihr euch sicher sein? Erklärt.“ Dabei sollen die Kinder ins Gespräch über verschiedene Zahlzusammenhänge kommen und sich ihre Strukturierungsideen gegenseitig vorstellen bzw. zusammen entwickeln (s. Abb. 15). Falls die Kinder bereits die Aktivität Immer 5 – Finde verschiedene Türme durchgeführt haben, kann auf den an den Turmpaaren entwickelten Strategieansatz (gegensinniges Verändern) zurückgegriffen werden. Mögliche Impulse sind: „Erinnerst du dich noch an unsere Strategien bei den Turmpaaren? Wie kannst du die hier verwenden?“

Wichtig ist hierbei, dass die symbolische Notation in dieser Phase von der ikonischen Darstellung der Zerlegung am Punktstreifen weiterhin begleitet wird. Es sollte nicht zu früh auf eine rein formale Notation gewechselt werden. Ob die Zerlegungen weiterhin in der Tabellenschreibweise oder bereits in der Pluschreibweise notiert werden, sollte je nach Kenntnisstand der Lernenden entschieden werden.

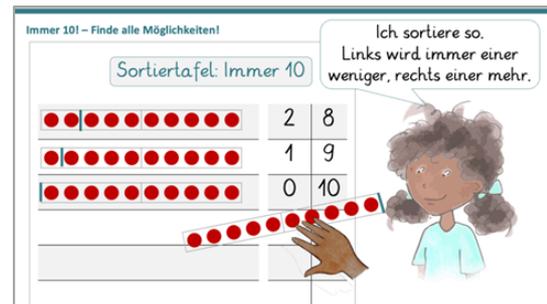


Abbildung 15: Arbeiten mit der Sortiertafel,  
Zeichnungen: C. Bendler & K. Mosen

### Impulse

- Was fällt dir auf?
- Sind das alle Zerlegungen? Woher weißt du das?
- Wie kannst du vorgehen, damit du sicher alle Zerlegungen findest?
- Wie kannst du überprüfen, ob du alle Zerlegungen gefunden hast?
- Vergleich einmal die Sortierung von Kind A und dir. Was fällt dir auf? Erkläre.

### Beobachtungsmöglichkeiten

- Wie sortiert das Kind die Zerlegungen?
- Geht das Kind systematisch vor? Nutzt es die Strategie des gegensinnigen Veränderns? Oder die Idee der Kommutativität?
- Kann das Kind seine Strukturierung beschreiben?

## Weiterführender Gesprächsanlass

In der Reflexion stellen verschiedene Lernende ihre Sortierungen vor (beispielsweise unter einer Dokumentenkamera). Anschließend können die Sortierungen verglichen werden und strukturelle Zusammenhänge herausgearbeitet werden („Vergleiche einmal die Sortierungen von Ayla, Theo und Sophia, was fällt dir auf? Was ist anders? Erklär mal!“ (s. Abb. 16–18)).

Immer 10 – Finde alle Möglichkeiten!

Immer 10



Ayla

2   8	2 1 8
1   9	1 1 9
0   10	0 1 10
10   0	10 1 0
9   1	9 1 1
8   2	8 1 2
7   3	7 1 3
6   4	6 1 4
5   5	5 1 5
4   6	4 1 6
3   7	3 1 7

Abbildung 16: Sortierung von Ayla, Zeichnung: C. Bendler

Immer 10 – Finde alle Möglichkeiten!

Immer 10



Theo

0   10	0 1 10
10   0	10 1 0
1   9	1 1 9
9   1	9 1 1
2   8	2 1 8
8   2	8 1 2
3   7	3 1 7
7   3	7 1 3
4   6	4 1 6
6   4	6 1 4
5   5	5 1 5

Abbildung 17: Sortierung von Theo, Zeichnung: C. Bendler

Immer 10 – Finde alle Möglichkeiten!

Immer 10



Sophia

0   10	0 1 10
1   9	1 1 9
2   8	2 1 8
3   7	3 1 7
4   6	4 1 6
5   5	5 1 5
6   4	6 1 4
7   3	7 1 3
8   2	8 1 2
9   1	9 1 1
10   0	10 1 0

Abbildung 18: Sortierung von Sophia, Zeichnung: C. Bendler

#### Mögliche Erkenntnisse:

- **Ayla:** Ayla hat bei der Zerlegung des Punktestreifens mit der Zerlegung 2 | 8 begonnen und dann gegenseitig verändert ( $-1/+1$ ). Als sie die Zerlegung 0 | 10 gefunden hat, konnte sie ihre Strategie nicht weiter fortsetzen und hat rechts weitergemacht. Hier bietet es sich an, mit den Lernenden zu thematisieren, dass man am Rand des Punktestreifens beginnen sollte.
- **Theo:** Theo hat zu jeder Zerlegung die kommutative Zerlegung (Tauschaufgabe) gefunden und so die Zerlegungen sortiert. Die Schwierigkeit dabei ist, auf diese Weise alle Zerlegungen zu finden. Theo kombiniert geschickt die Strategie direkt mit dem gegenseitigen Verändern.
- **Sophia:** Sophia verändert die Zerlegungen systematisch gegenseitig und findet so alle Lösungen. Das bei den Türmen kennengelernte Verfahren bietet sich auch hier an. Im Gegensatz zu Ayla beginnt sie systematisch ganz links.

#### Variation

Alternativ können zum Nachvollziehen der strukturellen Zusammenhänge auch weitere Türme aus Holzwürfeln verwendet werden. Dort wird das gegenseitige Verändern durch das Umlegen besonders gut deutlich, ist aber in der Notation aufwendiger und schwieriger zu sortieren.

**Darauf kommt es an:**

- *Handlungsbegleitende Mathesprache:* Der Verstehensprozess der Lernenden soll durch Darstellungsvernetzungen unterstützt werden: Die konkrete Handlung – das Markieren des Punktestreifens – wird mit Mathesprache („Du hast 6 in 4 und 2 Punkte zerlegt.“) begleitet und zeichnerisch dokumentiert. So sollen mittelfristig mentale Vorstellungsbilder zu den Zahlzerlegungen aufgebaut werden.
- *Beziehungen zwischen Zahlzerlegungen herstellen und beschreiben:* Die Kinder sollten dazu angeregt werden, die Zerlegungen nicht isoliert nebeneinander zu betrachten, sondern Beziehungen zwischen den Zerlegungen herzustellen („Was ist gleich? Was verändert sich?“).
- *Strukturierungen und strukturelle Vergleiche gezielt anregen:* Darstellungen zu strukturieren ist für Lernende nicht selbstverständlich. Auch die Begriffe „Sortieren“ und „Ordnen“ sind nicht allen Kindern geläufig. Für die Erarbeitung aller Zerlegungen ist es daher wichtig, die Lernenden zum Strukturieren anzuleiten und in Gesprächen bzw. der Reflexion gezielt strukturelle Vergleiche von der eigenen Lösung mit anderen bzw. fiktiven Kindern anzuregen. Hierbei müssen Gemeinsamkeiten und Unterschiede in den Blick genommen werden und die Vorgehensweisen reflektiert werden.

**Benötigtes Material**

Einführung	Arbeitsphase I	(Zwischen-) Reflexion
Punktestreifen an der Tafel / dem Smartboard	Punktestreifen mit immer 10 Punkten und Platz zur symbolischen Notation	Ergebnisse aus Arbeitsphase I
	Arbeitsphase II	Reflexion
	Punktestreifen (ggf. Sortiertafel)	Ergebnisse aus Arbeitsphase II (ggf. zusätzlich fiktive Kinderbeispiele)

Aktivität in Anlehnung an: Mathe inklusiv mit PIKAS (o. J., a). Zahlvorstellungen. Aufgabenstellung kompakt „Zahlen zerlegen“. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/634>.

## 5 Passt! – Passt nicht!

**Ziel:** Die Lernenden können gleiche Zahlzerlegungen in verschiedenen Darstellungen identifizieren und Strukturen in Zerlegungen benennen, die eine Zerlegung charakterisieren (hier konkret Zerlegungen mit 5 bzw. mit 1 und Zerlegungen in gleich große Anzahlen).

### Einführung

Ziel der Einführung ist es, die Idee und die Regeln des Spiels „Passt! – Passt nicht!“ zu erarbeiten. Das Spiel nutzt die Darstellungen: Fingerbild, Zwanzigerfeld und Hütchendarstellung. Ist den Lernenden eine Darstellung aus dem Unterricht noch nicht bekannt, muss diese vor Spielbeginn gemeinsam verstehensorientiert erarbeitet werden. (Sind den Lernenden bereits Zerlegungsaufgaben wie  $6 = 5 + 1$  bekannt, können die Hütchendarstellungen auch durch diese ersetzt werden.) Zudem ist es zunächst notwendig zu klären was „passt“ bedeutet. Die Lehrkraft präsentiert wie in Abb. 19 Spielkarten an der Tafel / dem Smartboard / der Wand und gibt folgenden Auftrag: *„Schaut euch die Karten ganz genau an. Welche Karten passen zu der grauen Karte? Welche passen nicht? Warum?“*

Als „passend“ sollen in dieser Aktivität Karten mit gleicher Zahlzerlegung gelten (bspw. Abb. 19: Fingerbild mit Fünferhand und Hütchendarstellung). In der Einführung können von den Kindern zunächst auch andere Kriterien für eine „Passung“ benannt werden, z. B. eine gleiche Gesamtanzahl (in diesem Fall würden alle Karten mit gleicher Anzahl unabhängig von der Zahlzerlegung zueinander passen). Nachdem die Kinder verschiedene Überlegungen und Begründungen zur Passung angestellt haben, würdigt die Lehrkraft die verschiedenen Möglichkeiten und hebt hervor, dass dies grundsätzlich verschiedene Möglichkeiten der Passung sind, folgend jedoch eine Passung zählt: *„Für uns passen heute Karten immer dann zueinander, wenn sie die gleiche Zahlzerlegung haben.“* Wichtig ist es hier, sich bei den Passungen nicht nur auf die abgebildete Gesamtanzahl zu konzentrieren (*„Auf beiden Karten sind es insgesamt 6“*), sondern auf die Struktur (*„Auf beiden Karten ist ein Fünfer und ein Einer, bei dem Hütchen wird 6 in 5 und 1 zerlegt und bei dem Fingerbild sehe ich die Fünferhand und noch einen Finger.“*) Tipp: Sinnvollerweise werden dazu Beispiele zu „passt“ und „passt nicht“ präsentiert (s. Abb. 20). Anschließend wird die Spielidee (Erläuterung siehe Arbeitsphase) kurz an der Tafel / dem Smartboard angespielt, hier kann bereits angeregt werden darüber nachzudenken, wie man besonders schnell erkennen kann, dass zwei Karten zueinander passen oder nicht.

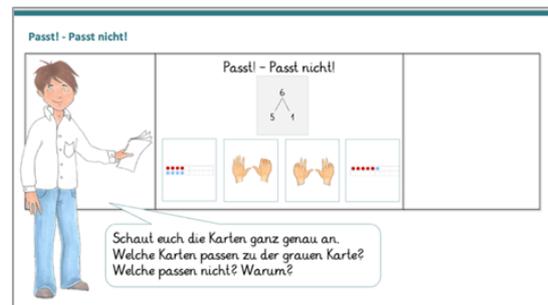


Abbildung 19: Tafelbild Einstieg "Passt! – Passt nicht!", Zeichnungen: C. Bendler & K. Mosen

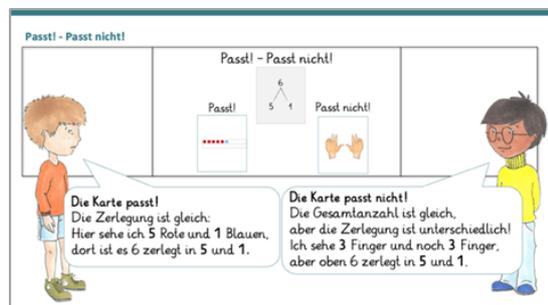


Abbildung 20: Tafelbild „Beispiele für (Nicht-)Passung“, Zeichnungen: C. Bendler & K. Mosen

## Arbeitsphase

Die Kinder spielen eine erste Runde „Passt! – Passt nicht!“ Dazu erhalten die Kinder in Gruppen (2–4 Personen) jeweils zwei Kartenstapel (einen mit weißen und einen mit grauen Karten). Auf den weißen Karten sind Zwanzigerfelder und Fingerbilder abgebildet und auf den grauen Karten Hütchenzerlegungen.

Jedes Kind erhält zu Beginn des Spiels vier weiße Karten, die es offen vor sich hinlegt (s Abb. 21) und ganz genau anschaut. Vom verdeckten grauen Kartenstapel wird dann eine Karte aufgedeckt. Die Kinder schauen sich die aufgedeckte Karte an und prüfen, ob eine ihrer Karten dieselbe Zerlegung zeigt. Wenn ja, darf das Kind seine Karte auf den Mittelstapel ablegen und erklären, warum seine Karte passt, z. B. *„Auf dem Mittelstapel liegt 6 zerlegt in 5 und 1. Auf meinem Bild sehe ich 6 Finger, die Fünferhand und noch einen Finger. Die Zerlegung ist gleich, die Karten passen zusammen!“* Wenn ein weiteres Kind eine passende Karte hat und dies vor dem Aufdecken der nächsten grauen Karte bemerkt, darf auch das Kind seine Karte auf dem Mittelstapel ablegen und begründen. Die anderen Kinder prüfen dabei immer, ob die Begründung passt. Anschließend wird eine neue Karte vom verdeckten Stapel aufgedeckt. Wenn kein Kind eine passende Karte hat, können die Kinder auch gemeinsam beschließen, dass eine neue Karte aufgedeckt wird ohne, dass ein Kind abgelegt hat. Gewonnen hat das Kind, das zuerst keine Karten mehr vor sich liegen hat.



Abbildung 21: Arbeitsphase, Zeichnungen: K. Mosen

Nach der ersten Spielrunde werden verschiedene Spielstrategien gemeinsam reflektiert. Im Anschluss kann das Spiel „Passt! – Passt nicht!“ erneut gespielt werden.

### Impulse

- Welche Karten passen zusammen? Warum?
- Wo sehe ich die 5 im Zwanzigerfeld / im Fingerbild?
- Wie erkenne ich schnell, dass es eine / keine Zerlegung mit 5 ist?
- Wie erkenne ich schnell, dass es eine Zerlegung in zwei gleich große Teile ist?
- Aus welchen Teilen setzt sich die Zahl zusammen?

### Beobachtungsmöglichkeiten

- Wie erfassen die Kinder die Darstellung? Zählend oder erkennen sie Teilmengen auf einen Blick?
- Inwiefern erfassen die Kinder die 5 als Einheit (bspw. als volle Hand / im Zwanzigerfeld als Fünferstreifen)?
- Wie verbalisieren die Kinder die Passung der Zerlegungen?

**Weiterführender Gesprächsanlass**

Die Aktivität zielt neben dem Erkennen gleicher Zahlzerlegungen in unterschiedlichen Darstellungen (Fingerbild, Zwanzigerfeld und Hütchendarstellung) insbesondere darauf, gemeinsame Strukturen in besonderen Zahlzerlegungen zu erkennen und diese zu nutzen. Diese sollten in der Abschlussreflexion in den Blick genommen werden (ggf. auch bereits in einer Zwischenreflexion, um das Abzählen der Teilmengen zu vermeiden). Der Fokus liegt dabei auf besonderen Zahlzerlegungen, die später für die Automatisierung in Strategiegruppen wichtig sind: Zerlegungen mit 5, Zerlegungen mit 1, Zerlegungen in gleiche Anzahlen.

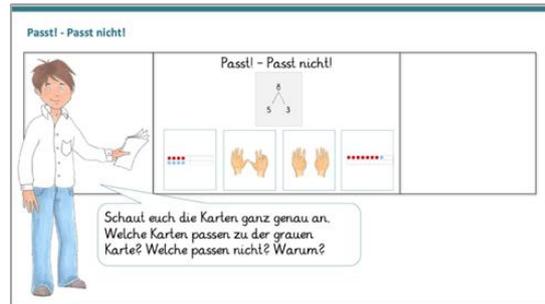


Abbildung 22: Tafelbild Reflexion „gleiche Anzahl – andere Zerlegung“, Zeichnungen: C. Bendler & K. Mosen

Ausgangspunkt ist eine konkrete Spielsituation aus dem vorherigen Spiel (siehe Abb. 22): Die Lehrkraft präsentiert eine konkrete Spielsituation an der Tafel / dem Smartboard, in der die Gesamtanzahl immer 8 ist, und fragt: „Woran erkenne ich in den Bildern besonders schnell, welche zusammenpassen?“ (ggf. konkreter: „... dass es eine Zerlegung / keine Zerlegung mit 5 ist?“, „... dass es eine Zerlegung mit 1 / mit zwei gleichen Hälften ist?“). Die Kinder sollen nun gemeinsam herausfinden und begründen, was zusammengehört. Die Schwierigkeit liegt hier darin, dass sich die Kinder nicht mehr an der Gesamtanzahl (alles Zerlegungen der 8) orientieren können, sondern die Struktur der Zerlegung ganz genau betrachten müssen. Dies ist in besonderem Maße herausfordernd, da es nun drei verschiedene Strukturen bei derselben Gesamtanzahl zu entdecken gibt. Nachdem die Spielkarten an der Tafel sortiert werden, soll im Plenum gemeinsam überlegt werden, was das Besondere an jeder Gruppe ist (Zerlegung mit 5 (s. Abb. 23), Zerlegung in zwei gleich große Teile (s. Abb. 24), Zerlegung mit 1 (s. Abb. 25))

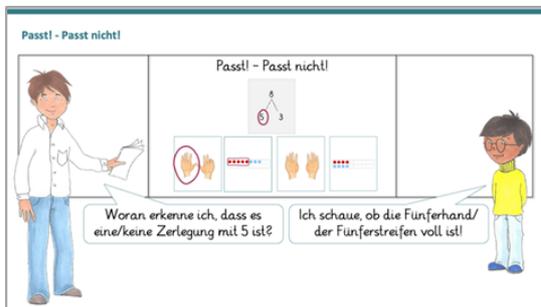


Abbildung 23: Tafelbild Reflexion „Zerlegungen mit 5 erkennen“, Zeichnungen: C. Bendler & K. Mosen

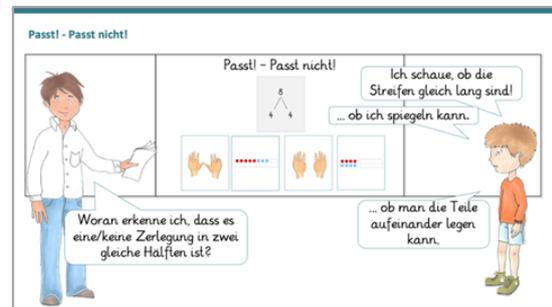


Abbildung 24: Tafelbild Reflexion "Zerlegungen in zwei gleiche Teile erkennen", Zeichnungen: C. Bendler & K. Mo-

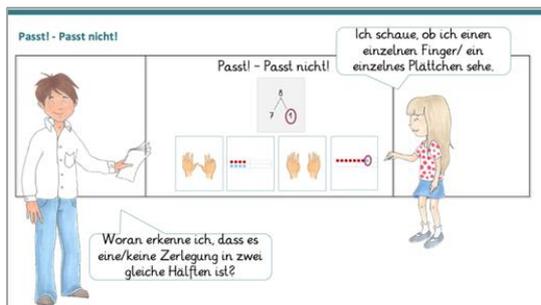


Abbildung 25: Tafelbild: Reflexion "Zerlegungen mit 1 erkennen", Zeichnungen: C. Bendler & K. Mosen

Mögliche Antworten:

- *Zerlegung mit 5:* Den Fünfer erkennt man an der vollen Hand / dem vollen Fünferstreifen. Wenn es keine/n volle/n Fünferhand/Fünferstreifen gibt, dann ist es keine Zerlegung mit 5 (s. Abb. 23).
- *Zerlegung mit 1:* Den Einer erkennt man an einem einzelnen Plättchen/Finger (s. Abb. 24).
- *Zerlegung in Hälften:* Dass es zwei gleiche Hälften sind, erkennt man daran, dass die Streifen gleich lang sind, man die Streifen/Hände übereinanderlegen kann oder man spiegeln kann. Ist dies nicht der Fall, dann ist es keine Zerlegung in zwei gleiche Hälften (s. Abb 25).

Mit diesen neuen Erkenntnissen wird das Spiel (ggf. in der nächsten Stunde) wiederholt und überprüft, wie die Strukturen beim Spielverlauf unterstützen können.

**Darauf kommt es an:**

- *Nicht zählende Vorgehensweisen unterstützen:* Sofern Sie in der Arbeitsphase sehen, dass Kinder die einzelnen Teilmengen in den Fingerbildern oder im Zwanzigerfeld abzählend bestimmen, bietet sich eine Zwischenreflexion an, die darauf abzielt, Strategien zum schnellen Sehen von Zahlzerlegungen zu fördern. (Weitere Anregungen zum schnellen Sehen finden Sie in Förderbaustein 3.)  
→Um die Fünferstruktur gemeinsam mit den Kindern zu erarbeiten, kann eine Spielsituation (siehe Abb. 23) an die Tafel gehängt und gefragt werden: „*Woran erkenne ich auf einen Blick, dass es eine/keine Zerlegung mit 5 ist?*“
- *Handlungsbegleitende Mathesprache:* Die Lehrkraft ermuntert die Kinder während des Spiels ihre Zuordnungen zu verbalisieren und begleitet selbst die Handlung sprachlich: „*8 zerlegt in 5 und 3, dazu passt ..., weil ...*“ Die Versprachlichung sollen die Kinder auch in der Reflexionsphase verwenden.

### Variation

*Klatschspiel:* Der weiße Kartenstapel wird offen auf dem Tisch verteilt. Jedes Kind erhält eine Fliegenklatsche. Nacheinander wird immer eine Karte vom verdeckten grauen Stapel umgedreht, wer zuerst auf eine passende weiße Karte schlägt, darf die weiße Karte behalten (passend sind immer zwei weiße Karten). Gewonnen hat das Kind, das am Ende am meisten weiße Karten hat.

*Paarspiel:* Die weißen Karten werden verdeckt auf den Tisch gelegt. Zwei Karten mit derselben Zerlegung werden als Paar gewertet.

### Benötigtes Material

Einführung	Arbeitsphase I	(Zwischen-) Reflexion
Spielkarten zur Präsentation an der Tafel / dem Smartboard	Spielkarten „Passt! – Passt nicht!“	Spielkarten zur Präsentation an der Tafel / dem Smartboard

## 6 Wie viele sind verdeckt?

**Ziel:** Die Lernenden können bei gegebener Gesamtmenge und gegebener Teilmenge auf die fehlende Teilmenge schließen (u. a. Zerlegungen mit 10, 1 und 0).

Nachdem in den vorherigen Aktivitäten die Zerlegungen im Zahlenraum bis 10 im Fokus standen, wird der Zahlenraum in dieser Aktivität bis 20 erweitert. Neben den bisher fokussierten Zerlegungen mit 5, mit 1 und in zwei gleich große Teile, spielen auch Zerlegung mit 10 und mit 0 eine zentrale Rolle. Für das flexible Rechnen sind insbesondere die Zerlegungen in Zehner und Einer – auch im Hinblick auf das Stellenwertverständnis – von großer Bedeutung.

### Einführung

Zum Einstieg bittet die Lehrkraft ein Kinderpaar nach vorne und lässt das Kinderpaar eine Zahl zwischen 10 und 20 aus Teilmengen zusammensetzen. Als Teilmengen stehen den Kindern Fünfer- und Zehnerstreifen sowie Einerplättchen zur Verfügung. Die Plättchen werden nun nicht mehr in ein freies Feld gelegt, sondern bereits im Zwanzigerfeld angeordnet, um den Lernenden mehr Strukturen zur Orientierung zu bieten. Dabei sind verschiedene Vorgehensweisen möglich, z. B. das Zusammensetzen von 12 aus 2 Fünfern und 2 Einern oder das Zusammensetzen von 12 aus einem Zehner und 2 Einern.

In einem zweiten Schritt erklärt die Lehrkraft das Abdeckspiel und lässt auch hier ein Kinderpaar die Handlung an der Tafel / dem Smartboard vormachen. Die Lehrkraft erklärt: „*Kind 1 zieht geheim einen Abdeckauftrag, Kind 2 schaut weg. Kind 1 deckt die Punkte mit den grauen Abdeckstreifen passend ab. Wenn Kind 1 fertig ist, darf Kind 2 wieder schauen. Kind 2 soll nun herausfinden, wie viele Punkte verdeckt wurden.*“ Wenn Anastasia beispielsweise den Abdeckauftrag „10 bleiben!“ zieht, muss sie den grauen Abdeckstreifen so auf dem Zwanzigerfeld positionieren, dass von den 12 Punkten nur noch 10 sichtbar sind (s. Abb. 26).

Anastasias Partnerin Ayla, muss nun überlegen, wie viele Punkte verdeckt sind. Wenn nur das Ergebnis genannt wird, fragt die Lehrkraft genauer nach, wie die Anzahl verdeckter Plättchen herausgefunden wurde. Gemeinsam kann überlegt werden, wie man vorgehen kann: Die Gesamtanzahl ist immer in Ziffern an der Tafel notiert, wir wissen also, wie viele Punkte es insgesamt sind. Zudem sehen wir einen Teil der Punktmenge. Diese Teilmenge kann unter Ausnutzung der Fünfer- und Zehnerstruktur des Zwanzigerfeldes ohne Abzählen erfasst werden. Wir überlegen also, wie 12 aus Teilen zusammengesetzt werden kann, wobei ein Teil vorgegeben ist. Die Lehrkraft regt die Kinder immer wieder zum lauten Denken an oder begleitet selbst sprachlich die Handlungen der Kinder. Ayla könnte z. B. erklären: „*Insgesamt sind es 12. Ich sehe noch 10 Punkte. Also müssen 2 versteckt sein! 12 setzt sich aus 10 und 2 zusammen.*“ Gemeinsam wird die Abdeckung entfernt und die Vermutung des Kindes überprüft (s. Abb. 26). Je nach Bedarf wird die Probestandung einmal oder mehrfach an der Tafel durchgeführt.

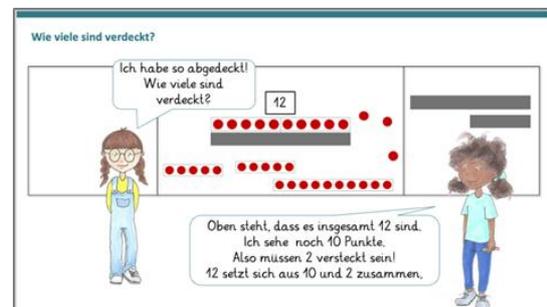


Abbildung 26: Tafelbild Einstieg "Wie viele sind verdeckt?", Zeichnungen: C. Bendler

## Arbeitsphase

Anschließend wiederholen die Kinder die Lege- und Abdeckhandlung aus der Einführungsphase in Partnerarbeit. Geben Sie den Kindern in der ersten Spielrunde zunächst drei Abdeckaufträge (z. B. „10 weg!“, „1 weg!“ und „10 bleiben!“). Kind 1 zieht zunächst eine Ziffernkarte (ZR 10–20) und legt die Anzahl. Je nach Stand der Lernenden kann auch bereits die Legehandlung hinter einem Sichtschutz stattfinden. Anschließend zieht Kind 1 geheim einen Abdeckauftrag und deckt entsprechend ab. Dazu sollte ein Sichtschutz aufgestellt werden oder Kind 1 wird darum gebeten, sich die Augen zuzuhalten. Wenn Kind 1 mit Abdecken fertig ist, darf Kind 2 wieder auf das Material schauen. (s. Abb. 27)

Kind 1 soll nun herausfinden, wie viele verdeckt sind. Wie in der Einführungsphase muss Kind 2 dazu die sichtbare Teilmenge zunächst erfassen und überlegen, wie viele noch bis zur Gesamtanzahl fehlen (s. Abb. 28). Anschließend wird gemeinsam überprüft und die Rollen gewechselt. Wenn die Kinder die Abdeckhandlung sicher durchführen können, können sie weitere Abdeckaufträge hinzugeben (s. Abb. 28).



Abbildung 27: Arbeitsphase – Abdeckauftrag,  
Zeichnungen: K. Mosen & C. Bendler



Abbildung 28: Arbeitsphase – Was ist verdeckt?,  
Zeichnungen: K. Mosen & C. Bendler

### Impulse

- Wie viele sind es insgesamt?  
Wie viele siehst du noch?  
Wie viele Plättchen wurden verdeckt?
- Aus welchen Teilen besteht die Zahl 12?
- Wie viele fehlen von ... bis ...?

### Beobachtungsmöglichkeiten

- Zählt das Kind die sichtbare Teilmenge einzeln ab oder erfasst es sie auf einen Blick?
- Zählt das Kind von der erfassten Teilmenge aus weiter bis zur vorgegebenen Zielanzahl oder nutzt es Zahlzerlegungen?

## Weiterführender Gesprächsanlass

Bevor Sie mit der Reflexionsphase starten, stellen Sie sicher, dass die Lernenden mehrere Übungsphasen mit den Abdeckaufträgen durchlaufen haben.

Für die Reflexion bereitet die Lehrkraft ein Zwanzigerfeld, Fünfer-/Zehner-/Abdeckstreifen und Plättchen an der Tafel / dem Smartboard vor. Die Lehrkraft fragt nach einem freiwilligen Paar, das die Lege- und Abdeckhandlung mit einer gezogenen Ziffernkarte vormachen möchte. Im Anschluss fragt die Lehrkraft die Kinder, a) wie sie die Punkte schnell passend abdecken können und b) wie sie schnell erkennen können, wie viele verdeckt sind (s. Abb. 29 und 30). Bei Zerlegungen in Zehner und Einer können auch Bezüge dazu hergestellt werden, wie die Anzahl zu Beginn aus Teilmengen zusammengesetzt wurde.

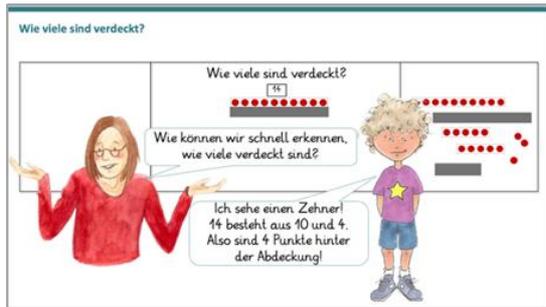


Abbildung 29: Tafelbild Reflexion (I), Zeichnungen: K. Mosen & C. Bendler

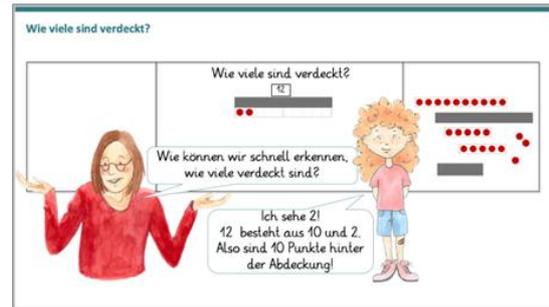


Abbildung 30: Tafelbild Reflexion (II), Zeichnungen: K. Mosen & C. Bendler

Mögliche mathematische Strategien wären z. B. die folgenden:

- „10 bleiben!“: 10 sollen übrig bleiben. Beim Legen der Anzahl 14 konnten wir schon sehen, dass sich die Anzahl aus einem Zehner und 4 Einern zusammensetzt. Wir können einfach die 4 Einer in der zweiten Zeile abdecken, dann sieht man nur noch den Zehnerstreifen. Wir können auch schnell herausfinden, wie viele verdeckt sind. Wir wissen: 14 setzt sich aus 10 und 4 zusammen. Wenn wir nur noch die 10 sehen, müssen 4 versteckt sein.
- „10 weg!“: 10 sollen abgedeckt werden. Beim Legen der Anzahl 12 konnten wir schon sehen, dass sich die Anzahl aus einem Zehner und 2 Einern zusammensetzt. Wir können einfach Zehnerstreifen in der ersten Zeile abdecken, dann sieht man nur noch die Einer in der zweiten Zeile. Wir können auch schnell herausfinden, wie viele verdeckt sind. Wir wissen: 12 setzt sich aus 10 und 2 zusammen. Wenn wir nur noch die 2 Einer sehen, muss der Zehner versteckt sein.

An dieser Stelle sollte betont werden, dass es sich nicht um die subjektive Einschätzung des Schwierigkeitsgrades geht, sondern viel mehr um die mathematische Struktur (Zerlegung in Zehner und Einer).

### Darauf kommt es an

- *Nicht zählende Vorgehensweisen unterstützen:* Sofern Sie in der Arbeitsphase beobachten, dass die Lernenden Teilmengen (5, 10) einzeln abzählen, bietet sich eine Zwischenreflexion an, die darauf abzielt, Strategien zum schnellen Sehen und der Nutzung 5er- bzw. 10er-Struktur zu fördern. (Weitere Anregungen zum schnellen Sehen finden Sie in Baustein 2.)
- *Handlungsbegleitende Mathesprache:* Die Lehrkraft ermuntert die Kinder während der Aktivität ihre Handlungen zu verbalisieren und begleitet selber die Handlung sprachlich: „Wir haben 12 Plättchen gelegt. Jetzt sehen wir nur noch 11. 12 besteht aus 11 und 1. Ein Plättchen muss versteckt sein.“ Die Versprachlichung sollen die Kinder auch in der Reflexionsphase verwenden.

### Benötigtes Material

Einführung	Arbeitsphase	(Zwischen-) Reflexion
Zwanzigerfeld, Abdeckstreifen und Abdeckaufträge für die Tafel / das Smartboard	Ziffernkarten (ZR 10–20), Zwanzigerfeld, Abdeckaufträge, Abdeckstreifen	Zwanzigerfeld, Abdeckstreifen und Abdeckaufträge für die Tafel / das Smartboard

## Literatur

- Gaidoschik, M. (2019). *Rechenschwächen verstehen – Kinder gezielt fördern: Ein Leitfaden für die Unterrichtspraxis* (1. bis 4. Klasse) (11te Auflage). Persen Verlag.
- Häsel-Weide, U., Nührenbörger, M., Moser Opitz, E. & Wittich, C. (2017). *Ablösung vom zählenden Rechnen* (Auflage 4). Kallmeyer in Verbindung mit Klett.
- Mathe inklusiv mit PIKAS (o. J., a). Zahlvorstellungen. Aufgabenstellung kompakt „Zahlen zerlegen“. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/634>.
- Mathe inklusiv mit PIKAS (o. J., b). *Zahlvorstellungen. Beziehungen herstellen*. <https://pikas-mi.dzlm.de/node/123>
- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R. & Tubach, D. (2016). *Mit Zahlen spielen*. Klett.
- Tubach, D. (2019). *Relationales Zahlverständnis im Übergang von der Kita zur Grundschule*. Springer.
- Wittmann, E. C., Müller, G. N., Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D. & Heß, B. (2017). *Das Zahlenbuch 1*. Ernst Klett Verlag.