

Förderbaustein 7

Rechnen in Beziehungen: Addition und Subtraktion produktiv üben

Samira Cormann, Alissa Werner, Marcus Nührenbörger

Unter Beratung von Lara Marie Graf, Uta Häsel-Weide,
Karina Höveler, Lena Maiß, Franziska Tilke, Inga Wienhues

Mai 2022



Dieses Material wurde von Samira Cormann, Alissa Werner und Marcus Nührenbörger unter Beratung von Lara Marie Graf, Uta Häsel-Weide, Karina Höveler, Lena Maiß, Franziska Tilke und Inga Wienhues entwickelt. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Cormann, S.; Werner, A. & Nührenbörger, M. (2022). Rechnen in Beziehungen – Addition und Subtraktion produktiv üben. Open Educational Resources.

Projektherkunft

Dieser Förderbaustein wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet und wird auch im Projekt QuaMath weiter genutzt (beide Projekte gemeinsam von den Ländern finanziert).

Hinweis zu verwandtem Material

Förder- und Diagnosematerial zu diesen Themen:

- (1) Grundvorstellungen an Kontexten entwickeln: Addition und Subtraktion
- (2) Grundvorstellungen darstellungsbasiert vertiefen: Addition und Subtraktion
- (3) Einfache Aufgaben Addition – konkrete Auseinandersetzung mit einfachen Aufgaben
- (4) Einfache Aufgaben Subtraktion – konkrete Auseinandersetzung mit einfachen Aufgaben
- (5) Schwierige Additionsaufgaben mit einfachen Aufgaben flexibel rechnen
- (6) Schwierige Subtraktionsaufgaben mit einfachen Aufgaben flexibel rechnen
- (7) Rechnen in Beziehungen: Addition und Subtraktion produktiv üben

1 Förderbaustein Rechnen in Beziehungen

Ziel des Bausteins ist es, die Lernenden für Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben zu sensibilisieren und sie zum eigenständigen Erkennen, Begründen und Nutzen dieser Zusammenhänge zu befähigen, um langfristig flexible Rechenstrategien zu sichern.

Auf dem Weg zum flexiblen und sicheren Rechnen ist es bereits im Anfangsunterricht notwendig, dass Kinder Beziehungen zwischen Zahlen beim Rechnen kennen und nutzen lernen. Ein Ziel des Erkennens und Nutzens von Beziehungen ist es, das Ergebnis einer Aufgabe aus dem bereits ermittelten Ergebnis einer anderen, in Relation zur Ursprungsaufgabe stehenden Aufgabe abzuleiten. Anders formuliert: Es geht darum, sich den erneuten Rechenaufwand zu sparen, indem Zahl- und Aufgabenbeziehungen genutzt werden. Dies ist nicht nur unter ökonomischen Gesichtspunkten ein Ziel des Unterrichts, sondern es ist gerade für zählend rechnende Kinder relevant, die ansonsten stets auf die vertraute Zähl-Prozedur zurückgreifen, da sie keine Zusammenhänge zwischen den Aufgaben erkennen. Besondere Bedeutung kommt hierbei der Beachtung von dekadisch orientierten Teil-Ganzes-Beziehungen zu, wie etwa dem Erkennen, dass die 17 aus 10 und 7 besteht. Diese sind einerseits zentral, um Analogieaufgaben des Einspluseins und Einsminuseins zu erkunden und die zugrundeliegende Struktur für geschicktes und verständiges Rechnen in kleineren Zahlenräumen zu nutzen, andererseits bilden sie eine wichtige Grundlage für die weitere Erschließung größerer Zahlenräume oder gar der Dezimalzahlen in der Sekundarstufe. Ein Rechnen in Beziehungen erfordert aber nicht allein die Fähigkeit zur Zerlegung von Zahlen, sondern auch grundlegende operative Einsichten in Aufgaben und Umkehraufgaben sowie in die Bedeutung von elementaren Rechengesetzen wie Vertauschungs-, Verbindungs- und Konstanzgesetze bei der Addition und Subtraktion.

Die folgenden Diagnose- und Förderideen können Sie dabei unterstützen, Ihre Schülerinnen und Schüler für das Erkennen und Nutzen von Beziehungen zwischen Aufgaben zu sensibilisieren. Sie finden hierzu vor allem Anregungen zum Rechnen mit Analogien und zum Arbeiten mit Rechengesetzen. Die Aktivitäten sind so gestaltet, dass Sie als Lehrkraft diagnosegeleitet Informationen zu den Vorgehensweisen, Vorstellungen und Erkenntnissen der Kinder gewinnen können. Dazu können Sie sich an den Beobachtungsmöglichkeiten orientieren.

Alle Aufgabenformate lassen sich dem produktiven Üben zuordnen: Üben und Entdecken greifen dabei ergänzend ineinander. Die Aufgaben unterscheiden sich somit bezüglich der Strukturierung und der Vorgehensweise. Sie sind unterschiedlich stark strukturiert (nach einer Struktur geordnet oder durcheinander) und anschaulich oder formal (durch Darstellungsmittel gestützt oder nur durch mathematische Symbole).

Lernvoraussetzungen für die Arbeit mit dem Diagnose- und Förderbaustein „Rechnen in Beziehungen. Addition und Subtraktion produktiv üben“

Das Kind:

- Kennt die Zahlen bis 20 und hat entsprechende Zahlvorstellungen aufgebaut,
- Ist mit der Darstellung von Zahlen und Aufgaben mit Wendepfättchen, Fünfer- und Zehnerstreifen am Zwanzigerfeld vertraut,
- Hat tragfähige Vorstellungen zur Addition ausgebildet (einige vertiefende Aufgaben beziehen sich auf die Subtraktion. Diese können allerdings außen vorgelassen werden, sodass ein Verständnis zur Subtraktion nicht grundlegend ist).

Leitideen zur verständnisbasierten mathematischen Förderung:**diagnosegeleitet & differenzsensibel**

Um die Lernenden gezielt zu unterstützen, sollte die Förderung an die Lernvoraussetzungen und -entwicklungen der Kinder adaptiv angepasst werden. Hierzu ist es wichtig, spezifische Fördermaßnahmen kontinuierlich mit diagnostischen Prozessen zu verbinden. Um während der Förderung Einblicke in die mathematischen Entwicklungen, Denkweisen und Schwierigkeiten der Lernenden zu erhalten, bieten die sieben Bausteine zu Diagnose-Förderideen verschiedene Gesprächsanlässe und Beobachtungsmöglichkeiten. Die prozessbegleitenden Erkenntnisse ermöglichen die Festlegung und Adaption von Förderzielen sowie die differenzsensible Anpassung der Fördermaßnahmen an die individuellen Lernprozesse und -entwicklungen. Bei der Arbeit mit den Diagnose-Förder-Bausteinen ist es daher nicht notwendig und zielführend, alle Aufgaben nacheinander zu bearbeiten. Es ist vielmehr so gedacht, dass Aufgaben gezielt ausgewählt und adaptiert werden.

verstehensorientiert & beziehungsreich

Das reine Auswendiglernen von (unverstandenen) Inhalten ist keine tragfähige Grundlage für den weiteren Mathematikunterricht, da Lerninhalte im Fach Mathematik konsequent aufeinander aufbauen. Daher ist es zentral, die Vorstellungen der Lernenden aufzugreifen und (weiter) zu entwickeln, um auf diese Weise ein langfristiges, nachhaltiges mathematisches Lernen und Denken zu unterstützen. Im Zentrum der Diagnose-Förder-Bausteine stehen die zentralen mathematischen Inhalte zu Zahlen und Operationen, die den Aufbau eines inhaltlichen Verständnisses fördern. Um Inhalte zu verstehen, sind Einsichten in operative Beziehungen und deren Nutzen fundamental. Hierzu ist es wichtig, dass die Kinder immer wieder angeleitet werden, die Beziehungen zwischen den Zahlen und Aufgaben in den Blick zu nehmen und nicht Aufgabe für Aufgabe isoliert nebeneinander zu betrachten. Erst wenn das inhaltliche Verständnis gesichert ist, sollten Inhalte automatisiert werden.

kooperativ & sprachsensibel

Mathematisches Verständnis entwickelt sich im Gespräch. Daher sind die Diagnose-Förder-Bausteine nicht zur Einzelarbeit (im Wochenplan) geeignet, sondern benötigen den Austausch der Lernenden untereinander und gezielte Impulse der Lehrkräfte. Die Diagnose-Förderideen bieten kooperative Aufgaben und verschiedene Impulse als Gesprächsanlässe. In mathematischen Gesprächen über Entdeckungen, Darstellungen, Lösungsprozesse und Begründungen lernen die Kinder nicht nur andere Sichtweisen oder auch alternative Wege zum zählenden Rechnen kennen, sondern sie vertiefen auch ihr eigenes Verständnis, indem sie versuchen, dieses zu artikulieren. Die Diagnose-Förderideen bieten die für viele Kinder benötigte sprachensible Unterstützung zum Beschreiben von Zusammenhängen und Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben. Sprachliche Handlungen der Lehrkraft, Forschungsmittel und Wortspeicher mit Mathe-Wörtern und Sprachmitteln können die Lernenden hierbei unterstützen.

darstellungssensibel & nachhaltig

Zum Aufbau von grundlegenden, tragfähigen Vorstellungen über Zahlen, Operationen und mathematische Zusammenhänge ist der Einsatz und die Vernetzung von Darstellungen zentral. Das bedeutet, dass bei der Förderung die Handlung mit Material, die bildliche Darstellung, die Sprache und die mathematischen Symbole zueinander in Beziehung gesetzt werden müssen. Dafür reicht es nicht aus, wenn die Kinder in den Bausteinen Diagnose-Förderideen nur am Material handeln, sondern die Handlung muss auch mit der bildlichen, sprachlichen und/oder symbolischen Aufgaben verbunden werden. Zum Vorstellungsaufbau sind die in den Diagnose-Förderideen angesprochenen Materialien und Darstellungen mathematisch strukturiert (z. B. 5er-, 10er-Bündelung), fortsetzbar und in verschiedenen Zahlräumen einsetzbar. Die Strukturnutzung der Materialien (z. B. beim Zwanzigerfeld) und die Vernetzung der Darstellungen geschehen nicht automatisch, sondern bedürfen der gezielten Anregung durch die Lehrkraft – hierzu bieten die Diagnose-Förder-Bausteine verschiedene Anlässe.

2 Diagnose und Förderideen

Schöne Päckchen

Einführung

Den Kindern werden fünf Aufgabenkarten gezeigt, die in einem operativen Zusammenhang zueinander stehen, jedoch noch nicht sortiert sind. Die Kinder werden nun dazu aufgefordert, die Karten in eine sinnvolle Reihenfolge zu bringen. Nachdem ein Kind eine Reihenfolge vorgeschlagen hat, soll ein anderes vermuten, warum wohl so sortiert wurde. Auf diese Weise soll dafür sensibilisiert werden, dass Sortierungen mathematisch „schön“ sein können (z. B. Veränderung des ersten Summanden um +2 und damit verbunden eine Veränderung der Summe um +2). Natürlich können die Aufgaben auch nach individuellen Kriterien geordnet werden (z. B. Lieblingszahl nach oben), allerdings sind sie damit für andere Lernende womöglich schwieriger nachzuvollziehen. Es folgt der Verweis darauf, dass in der Stunde „Schöne Päckchen“ untersucht werden (zuweilen auch als Entdeckerpäckchen bezeichnet). Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass die Kinder lernen, nicht allein das Muster eines Schönen Päckchens zu beschreiben (z. B. „Die erste Zahl bleibt immer gleich, die zweite Zahl wird um eins größer, das Ergebnis wird auch immer um eins größer“), sondern auch die zugrunde liegende Struktur erkunden (z. B. wenn eine Anzahl immer um 1 vergrößert und zugleich die dazukommende Anzahl immer um dieselbe Menge verringert wird, dann verändert sich die Gesamtanzahl nicht).

Anschließend oder parallel dazu wird das Päckchen mit Plättchen am Zwanzigerfeld dargestellt (z. B. „Lege die Aufgabe mit Plättchen. Was musst du verändern, um nun die zweite Aufgabe darzustellen?“). Diese Vernetzung der Darstellung erhöht zugleich das Verständnis der Struktur des Schönen Päckchens (Die Beobachtungen der Kinder können zusätzlich mithilfe von Forschungsmitteln wie Pfeilen oder Farben visualisiert werden).

Abb. 1 Einführung zu Schönen Päckchen

Arbeitsphase

Für die Arbeitsphase stehen zwei verschiedene Diagnose- und Förderideen zur Verfügung, die nach dem individuellen Leistungsstand des Kindes bzw. nach den Vorkenntnissen der Schülerinnen und Schüler mit dem Aufgabenformat eingesetzt werden können. Das Material zu Diagnose- und Förderidee 1 stellt verschiedene Schöne Päckchen zur Verfügung, die sich hinsichtlich der zugrunde liegenden Strukturen unterscheiden. Es kann durch die Auswahl der Struktur und der Rechenoperation (Addition oder Subtraktion) sowie durch die Anzahl der Schönen Päckchen differenziert werden.

1 Schöne Päckchen erkunden und erklären

Ziel: Operative Zusammenhänge zwischen Aufgaben erkennen und erklären.

Die Kinder arbeiten in Lerntandems. Jedem Kind werden zwei Schöne Päckchen präsentiert, wobei sich die Strukturen der Päckchen von Kind A und Kind B unterscheiden, aber ähneln (z. B. die Summe wird immer 1 größer). Zunächst bearbeitet jedes Kind seine eigenen Päckchen, indem es die Aufgaben auf das Zwanzigerfeld überträgt und ausrechnet bzw. voneinander ableitet. Anschließend stellen sich die Kinder ihre Päckchen gegenseitig vor und erklären die zugrunde liegende Struktur. Grafische Elemente wie Farben, Kringel oder Pfeile können die Beschreibung der Struktur unterstützen. Sollten die Kinder bereits lesen, können auch erste sprachliche Mittel zur Unterstützung eingesetzt werden.

a) Lege und rechne:

$7 + 2 = \underline{\quad\quad}$	$2 + 5 = \underline{\quad\quad}$
$7 + 3 = \underline{\quad\quad}$	$3 + 5 = \underline{\quad\quad}$
$7 + 4 = \underline{\quad\quad}$	$4 + 5 = \underline{\quad\quad}$
$7 + 5 = \underline{\quad\quad}$	$5 + 5 = \underline{\quad\quad}$

b) Was passiert mit dem Ergebnis? Warum ist das so?

Abb. 2 Schöne Päckchen erkunden und erklären

2 Schöne Päckchen erfinden

Ziel: Aufgabenbeziehungen anwenden, um eigene operative Aufgabenserien zu entwickeln.

Im Tandem sollen die Kinder selbst Schöne Päckchen erfinden. Diese sollen anschließend mit anderen Tandems getauscht oder für eine Lernkartei bereitgestellt werden und dürfen folglich nicht ausgerechnet werden.

Anschließend sollen die Kinder festhalten, warum es sich bei ihren Päckchen um Schöne Päckchen handelt. Auch hier bietet es sich an, dass die Kinder exemplarisch mit Forschungsmitteln arbeiten oder gar schon einen ersten erklärenden Text verfassen.

a) Erfindet selbst zwei schöne Päckchen. Rechnet nicht aus.

----- + -----	----- + -----
----- + -----	----- + -----
----- + -----	----- + -----
----- + -----	----- + -----

b) Erklart!

Unser Päckchen ist schön, weil

Abb. 3 Schöne Päckchen erfinden

Impulse

- Was fällt dir auf?
- Wie verändert sich die erste Zahl (die zweite Zahl/das Ergebnis)?
- Warum ist das so?

Beobachtungsmöglichkeiten

- Wie ermitteln die Kinder die Ergebnisse?
- Wie sind sie vorgegangen?
- Welche Strukturen werden von den Kindern erfasst und näher beschrieben?
- Wie begründen sie die strukturellen Zusammenhänge?
- Wie können sie die Veränderungen am Päckchen mit Plättchen am Zwanzigerfeld darstellen und erläutern?
- Wie nutzen sie die Ergebnisse einer Aufgabe, um das Ergebnis einer anderen Aufgabe vorherzusagen?

Weiterführender Gesprächsanlass

Schöne Päckchen vorstellen (falls Diagnose- und Förderidee 2 bearbeitet wurde): Die Kinder stellen ihre gefundenen Schönen Päckchen vor und erläutern die Zusammenhänge. Hierbei können die Kinder auch nur die ersten zwei oder drei Aufgaben nennen, so dass die anderen Kinder aufgefordert sind zu überlegen, wie das Schöne Päckchen weiter gehen wird.

Schöne Päckchen finden: Vor den Kindern liegen oder hängen drei Schöne Päckchen (jeweils drei Aufgaben). Ein Kind sucht sich eins der Päckchen aus und beschreibt es, ohne dabei die konkreten Zahlen zu benennen (z. B. „Nur zur ersten Zahl kommt immer eins dazu, also wird auch das Ergebnis immer eins größer“, etc.). Die anderen Kinder müssen nun erraten, welches Päckchen sich das Kind ausgesucht hat. An einem oder zwei Päckchen wird die Wirkung auf die Summe/Differenz nochmal zusammen (mithilfe des Zwanzigerfeldes) begründet.

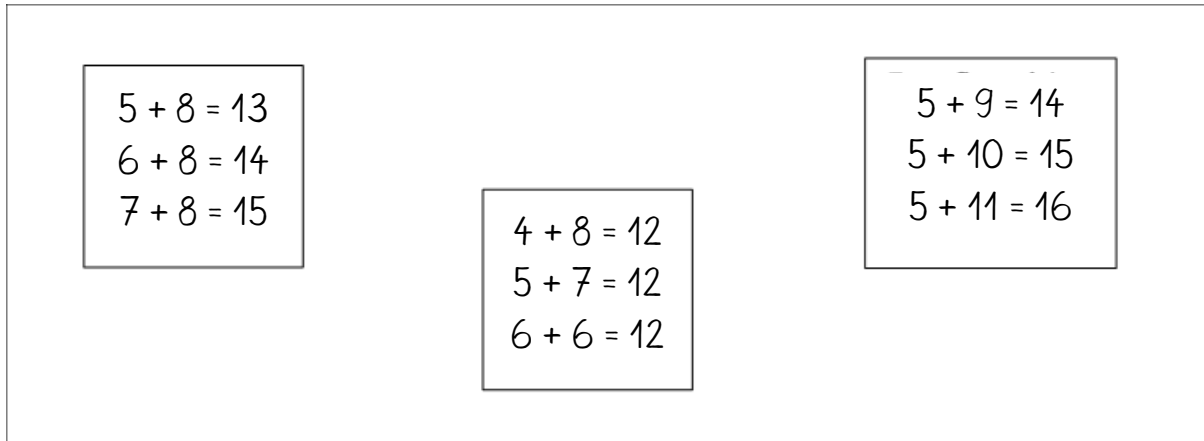


Abb. 4 Weiterführender Gesprächsanlass zu Schönen Päckchen

Material

Einführung	Arbeitsphase		Weiterführender Gesprächsanlass
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Aufgabenkarten ▪ Großes Zwanzigerfeld ▪ Wendepüttchen, Fünfer- & Zehnerstreifen 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Schöne Päckchen erkunden und erklären 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Unterrichtsmaterial 1.1 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Die Schönen Päckchen der Kinder aus der Arbeitsphase ▪ Oder drei Schöne Päckchen (an die Tafel geschrieben/ am Smartboard präsentiert)
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Schöne Päckchen erfinden 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Unterrichtsmaterial 1.2 	

Weitere Förderideen

- Schöne Päckchen zur Erkundung der Konstanz der Summe und der Differenz
- Arbeit mit operativ-strukturierten Zahlenmauern (z. B. mithilfe der Aktivität „Zahlenmauern“), Rechendreiecken, Zahlenraupen, etc.
- Aufgabenpaare oder -tripel aus einfachen Aufgaben und deren Nachbaraufgaben

Zahlenmauern

Bei dieser Förderidee geht es primär darum, Beziehungen zwischen Zahlenmauern zu entdecken und zu nutzen. Im Grunde sollen die Kinder „Schöne Zahlenmauern“ erkunden, beschreiben und erörtern. Es geht somit nicht um die Rechenregeln innerhalb der Zahlenmauer. Diese sollte in einer vorherigen Stunde erörtert und gesichert worden sein. Die Einführung in diese Aktivität kann die Erkenntnisse der vorherigen Stunde aufgreifen und wiederholen. Für die geplante Einheit sind Zahlenmauern sowie die Fachbegriffe Grundstein, mittlerer Stein und Deckstein bereits bekannt.

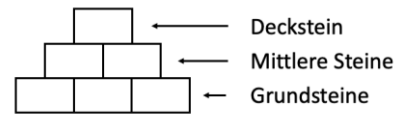


Abb.5 Wortspeicher Zahlenmauer

Einführung

Die Einführung findet mit allen Kindern statt. Es geht darum, dass die Kinder zwei Zahlenmauern vergleichen und erfahren, wie sie die Beziehung zwischen zwei Zahlenmauern ausdrücken und darstellen können. Zuerst wird eine dreistöckige Zahlenmauer präsentiert. Die Grundsteine haben unterschiedliche Zahlen. Ein Kind rechnet die Zahlenmauer vor. Nun wird eine weitere Zahlenmauer aufgedeckt. Zwei Grundsteine sind gleich, der dritte (linker Grundstein) ist um eins größer.

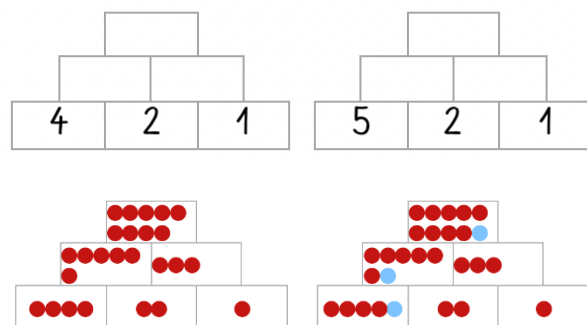


Abb. 6 Schöne Zahlenmauern

Es folgt die Fragestellung, ob die Kinder schon die Zahlen in den weiteren Steinen sagen können, ohne diese neu auszurechnen. Die Kinder erklären ihre Ideen. Diese können beispielsweise mit Forschungsmitteln, Symbolen (z. B. „+1“) oder mit Hilfe von (Magnet-)Plättchen in den jeweiligen Steinen verdeutlicht werden. Haben die Kinder keine Idee, werden die (Magnet-)Plättchen in die Grundsteine gelegt (die Struktur wird am besten deutlich, wenn die Zahlen z. B. mit roten Plättchen und die Veränderung durch ein blaues Plättchen dargestellt werden). Die Schülerinnen und Schüler legen entsprechend die Plättchen in die weiteren Felder und beschreiben das Vorgehen.

Arbeitsphase

Die Kinder erhalten unterschiedliche Zahlenmauern, die wie ein Schönes Päckchen in Beziehung zueinander stehen. Sie rechnen die erste Zahlenmauer (und eventuell anfangs auch die weiteren) aus. Im Kern geht es aber darum, dass die Kinder die Zahlenmauern vergleichen, die lokalen Veränderungen erfassen und deren Bedeutung für die weiteren leeren Felder der Zahlenmauer erkennen. Wenn dies den Kindern gelingt, können sie zwar die weiteren Zahlenmauern bestimmen, ohne die Rechenfertigkeit zu schulen. Aber sie schulen sich in der wesentlich bedeutsameren Kompetenz des Beschreibens mathematischer Muster und Begründens der zugrunde liegenden Strukturen. Hierbei sollten die Lernenden auch Forschungsmittel (z. B. Pfeile, Farben, etc.) nutzen. Der Einsatz von Forschungsmittel ist sinnvoll, da Kinder die Strukturen so besser erkennen.

Im Anschluss sollten die Kinder eigene Zahlenmauernfolgen erfinden und festhalten.

3 Schöne Zahlenmauern erkunden und erklären

Ziel: Operative Zusammenhänge zwischen Aufgaben erkennen und erklären.

Die Kinder arbeiten in Lerntandems. Jedes Kind bekommt je eine Schöne Zahlenmauernfolge präsentiert, wobei sich die Strukturen der Päckchen von Kind A und Kind B unterscheiden. Zunächst bearbeitet jedes Kind seine eigene Zahlenmauer. Die Struktur kann durch Rechnen oder geschicktes Vorgehen ermittelt werden. Anschließend stellen sich die Kinder ihre Zahlenmauer gegenseitig vor und erklären die zugrunde liegende Struktur. Zu Diagnose- und Förderidee 1 liegen weitere Zahlenmauern mit verschiedenen Strukturen vor, die in derselben Form gelöst werden können.

Bestimme den Deckstein.

Vergleicht. Nutzt Forschermittel.

Erklärt. Warum wird der Deckstein um 1 größer?

Abb. 7 Schöne Zahlenmauern erkunden und erklären

4 Schöne Zahlenmauern erfinden

Ziel: Aufgabenbeziehungen anwenden, um eigene operative Aufgabenserien zu entwickeln.

Die Lernenden entwickeln in den Tandems selbst Schöne Zahlenmauern. Sie füllen die Zahlenmauern mit Zahlen, welche in einem operativen Zusammenhang stehen. Dabei sind die Kinder frei, welche Steine der Zahlenmauern sie vorgeben. Die Zahlenmauern sollen anschließend mit anderen Tandems getauscht oder für die Lernkartei bereitgestellt werden und dürfen folglich nicht ausgerechnet werden. Anschließend sollen die Kinder erklären (weiterhin ohne die Mauern auszurechnen), warum es sich bei ihren Zahlenmauern um Schöne Zahlenmauern handelt.

a) Erfindet schöne Zahlenmauern. Rechnet nicht aus.

b) Tauscht mit einem anderen Tandem.

Die Zahlenmauern sind schön, weil ...

Abb. 8 Schöne Zahlenmauern erfinden

<p>Impulse</p> <ul style="list-style-type: none"> Was fällt dir auf? Welche Steine bleiben gleich, welche verändern sich? Wie verändert sich der (linke/mittlere/rechte) Grundstein bzw. der Deckstein? Warum ist das so? 	<p>Beobachtungsmöglichkeiten</p> <ul style="list-style-type: none"> Wie ermitteln die Kinder die Decksteine/Grundsteine? Wie sind sie vorgegangen? Welche Strukturen werden von den Kindern erfasst und näher beschrieben? Wie begründen sie die Zusammenhänge zwischen den Zahlenmauern und den Decksteinen?
--	--

Weiterführender Gesprächsanlass

Zahlenmauern vorstellen: Die Kinder stellen ihre gefundenen Schönen Zahlenmauern vor und erläutern die Zusammenhänge. Hierbei können die Kinder auch nur die ersten zwei Zahlenmauern zeigen, so dass die anderen Kinder aufgefordert sind zu überlegen, wie die Folge weiter gehen wird.

Zahlenmauern beschreiben: Die Kinder ordnen vier verschiedene, unvollständig ausgefüllte Zahlenmauern je einer vollständig ausgefüllten Zahlenmauer und einer der verschiedenen Aussagen zu Decksteinen begründet zu. Es gibt eine Karte mehr für den Deckstein, so dass die Kinder am Ende nicht raten können. Zudem besteht so die Möglichkeit, dass die Schülerinnen und Schüler eine entsprechende Zahlenmauer entwickeln.

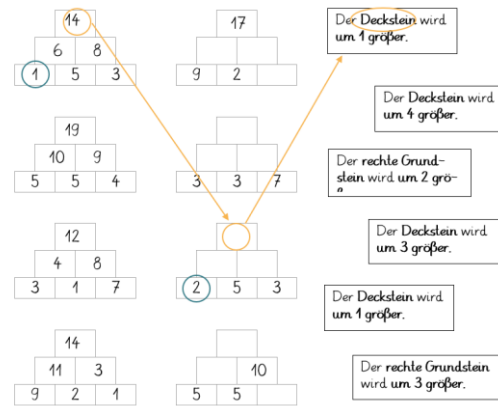


Abb. 9 Weiterführender Gesprächsanlass zu Schönen Zahlenmauern

Benötigtes Material

Einführung	Arbeitsphase		Weiterführender Gesprächsanlass
<ul style="list-style-type: none"> Große Zahlenmauern (Kopiervorlage 2.1) Magnet-Wendeplättchen 	<ul style="list-style-type: none"> Schöne Zahlenmauern erkunden und erklären 	<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 2.1 	<ul style="list-style-type: none"> Die Schönen Zahlenmauern der Kinder aus der Arbeitsphase oder Kopiervorlage 2.2
	<ul style="list-style-type: none"> Schöne Zahlenmauern erfinden 	<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 2.2 	

Weitere Förderideen

- Fokus stärker auf die die Subtraktion (Ergänzen) legen
- Fokus stärker auf Aufgaben legen, welche auf die Bestimmung des Grundsteins zielen
- Schöne Zahlenmauern zur Erkundung der Konstanz der Summe (die äußeren Grundsteine werden gegenseitig verändert)
- Arbeit mit operativ-strukturierten Schönen Päckchen (z. B. mithilfe der Aktivität „Schöne Päckchen“), Rechendreiecken, Zahlenraupen, etc.

Analogieaufgaben

Einführung

Den Kindern werden Anzahlen in Plättchendarstellungen präsentiert. Je ein Zehnerstreifen und ein Zwanzigerfeld, das die gleiche Zahl, ergänzt um einen Zehnerstreifen, darstellt, gehören zusammen und werden beieinander angeordnet. Die Kinder werden aufgefordert sich ein Pärchen auszusuchen, dieses zu beschreiben und die passenden Aufgaben dazu zu schreiben. Nachdem alle Pärchen beschrieben wurden, wird der übergreifende Zusammenhang zwischen den Paaren noch einmal explizit verbalisiert („Bei allen Pärchen kommt bei der zweiten Zahl ein Zehnerstreifen dazu. Bei der Zahl kommt dadurch eine Zehnerstelle dazu. Der Einer ändert sich nicht.“).

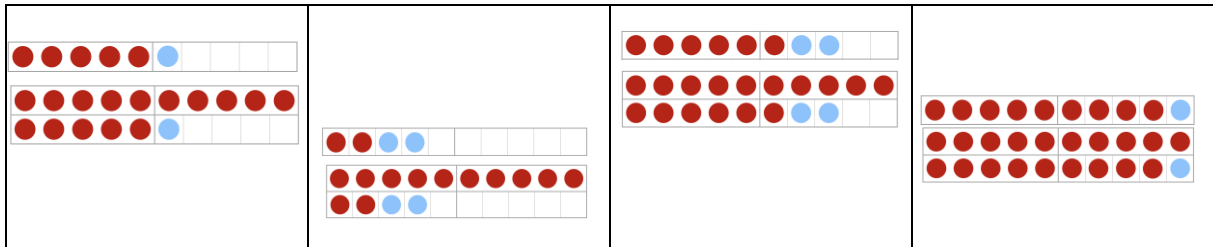


Abb. 10 Einführung zu Analogieaufgaben

Arbeitsphase

Für die Arbeitsphase stehen drei verschiedene Diagnose- und Förderideen zur Verfügung, mithilfe derer die Lernenden den Zusammenhang zwischen Analogieaufgaben eigenaktiv und auf verschiedenen Darstellungsebenen erkunden können.

5 Analogien-Memory

Ziel: Analogien in der ikonischen Darstellung des Zwanzigerfeldes erkennen.

Die Kinder arbeiten zu zweit oder zu dritt. Jede Kleingruppe erhält ein Memory-Set mit Zwanzigerfeldern (s. Anhang), wobei jedes Set acht Paare mit je einer „kleinen Aufgabe“ und einer „großen Aufgabe“ enthält. Die Anzahl der Paare kann je nach Kleingruppe reduziert oder erweitert werden. Abwechselnd sollen die Kinder nun Karten aufdecken und die zueinander passenden Zwanzigerfelder finden. Nachdem alle Paare gefunden wurden, werden die dazu passenden Aufgaben notiert und ausgerechnet.

Impulse

- Warum passen die beiden Aufgaben zusammen?
- Wo siehst du die kleine Aufgabe in der großen Aufgabe

Beobachtungsmöglichkeiten

- Welche Aufgaben ordnen die Kinder einander zu?
- Wie begründen sie ihre Zuordnung?
- Inwiefern gelingt der Wechsel zwischen der Darstellung am Zwanzigerfeld in die symbolische Schreibweise?

6 Kleine Aufgaben in großen Aufgaben sehen

Ziel: Erkennen der Beziehung / des Enthaltenseins von kleinen in großen Aufgaben (gestützt durch die Vernetzung von Darstellungsebenen).

Die Kinder arbeiten zunächst in Einzelarbeit. Zentrales Ziel dieser Idee ist, dass sie erkennen sollen, dass große Aufgaben kleine Aufgaben enthalten, die beim Rechnen helfen können. Dazu soll zunächst eine vorgegebene große Aufgabe am Zwanzigerfeld eingezeichnet werden. Anschließend soll geschaut werden, welche kleine Aufgaben in der großen enthalten ist. Diese soll eingezeichnet und unter der großen Aufgabe notiert werden. Anschließend sollen die Kinder selbst verwandte Aufgaben finden. Es ist ihnen dabei selbst überlassen, ob sie von der großen Aufgabe ausgehend die kleine Aufgabe suchen oder anders herum. Die selbst gefundenen Aufgabenpaare sollen anschließend dem Partnerkind vorgestellt werden. Dabei ist denkbar, dass das vorstellende Kind immer nur entweder die große oder die kleine Aufgabe zeigt und die andere abdeckt. Das Partnerkind soll diese nun selbst am Zwanzigerfeld zeigen und die symbolische Aufgabe nennen.

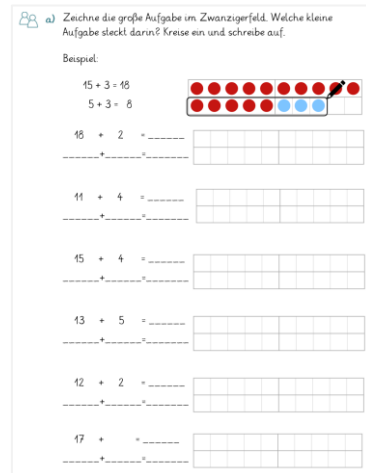


Abb. 11 Kleine Aufgaben in großen Aufgaben sehen

Impulse

- Zeichne erst die große Aufgabe ein.
- Wo siehst du die kleine Aufgabe?
- Wie viele bleiben noch übrig, nachdem du die kleine Aufgabe eingekreist hast?
- Woher wusstest du, dass die beiden Aufgaben zusammenpassen?

Beobachtungsmöglichkeiten

- Welche Plättchen kreist das Kind ein?
- Inwiefern zeigt sich ein inhaltliches Verständnis der Analogie (erkennt das Kind, dass die große Aufgabe immer um genau einen Zehner größer ist als die kleine oder bleibt es auf einer oberflächlicheren Ebene, i. S. v. „Da ist eine 1 mehr und deswegen kommt beim Ergebnis auch eine 1 davor“)?
- Welche Aufgaben wählt das Kind aus und welche Aufgabe ordnet es dieser zu?

7 Große Aufgaben finden

Ziel: Erkundung der Beziehungen zwischen kleinen und großen Aufgaben unter Ausnutzung der Kommutativität.

Die Aktivitäten dieser Diagnose- und Förderidee ähneln strukturell den Aktivitäten der vorigen Diagnose- und Förderidee. Nun soll von der kleinen auf die großen Aufgaben geschlossen werden. Zunächst finden die Kinder alleine große Aufgaben zu vorgegebenen kleinen Aufgaben. Anschließend sollen sie selbst Aufgabenpäckchen der gleichen Struktur entwickeln. Diese werden anschließend aufgegriffen, um erneut die Beziehung zwischen kleiner und großer Aufgabe aufzugreifen und davon ausgehend zu überlegen, warum eine kleine Aufgabe bei gleich zwei großen Aufgaben helfen kann. Um diese Beziehungen tatsächlich zu verstehen, ist die Arbeit mit dem

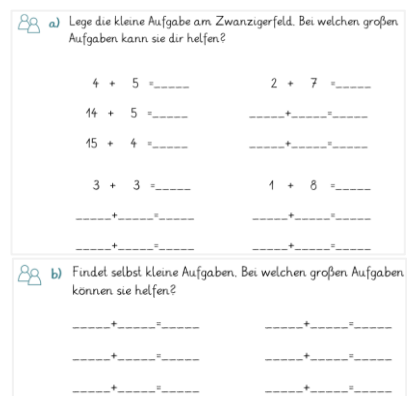


Abb. 12 Große Aufgaben finden

Zwanzigerfeld an dieser Stelle unerlässlich. Um den Kindern die Erkundungen zu erleichtern, wird folgender Impuls vorgeschlagen:

Impulse

- Wähle eine kleine Aufgabe, die du selbst erfunden hast. Beschreibe, wie die Aufgabe am Zwanzigerfeld gelegt werden muss. Beschreibe dann, was am Zwanzigerfeld verändert werden muss, um die beiden großen a zu erhalten. Warum kann man aus einer kleinen zwei große Aufgaben machen?“

Beobachtungsmöglichkeiten

- Welche Aufgaben wählen die Kinder aus und wie ordnen sie die Aufgaben zu?
- Wie beschreiben sie die Zuordnung?
- Wie erklären sie, warum die Aufgaben „verwandt“ sind?
- Wie nutzen sie diese Struktur, um schnell das Ergebnis einer großen Aufgabe zu ermitteln?

Weiterführender Gesprächsanlass

Den Kindern werden 12 verschiedene Karten präsentiert. Je vier davon gehören zusammen: eine zeigt das Zwanzigerfeld, eine die kleine Aufgabe, eine die große Aufgabe und eine die große Aufgabe mit vertauschten Einern. Die Kinder sollen nun Quartette aus den vier zusammenpassenden Karten bilden. Zu jedem Quartett gibt es eine Blanko-Karte, auf der die Kinder die entsprechend fehlende Aufgabe ergänzen müssen.

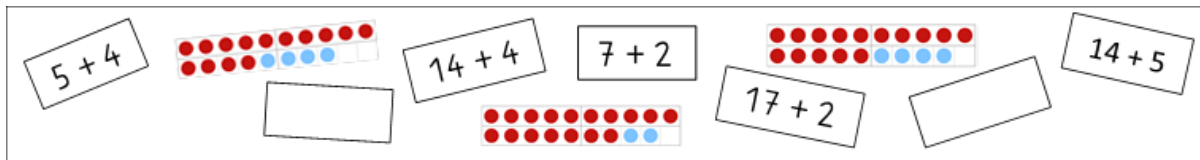


Abb. 13 Weiterführender Gesprächsanlass zu Analogieaufgaben

Wichtig ist, dass die Zuordnung bewusst reflektiert wird. Dabei können folgende Fragen als beispielhafte Impulse dienen:

- Wo sieht man am Zwanzigerfeld die Aufgabe $5 + 4$?
- Warum hilft die Aufgabe $7 + 2$ auch bei der Aufgabe $12 + 7$?
- Warum hilft die Aufgabe $4 + 4$ nur bei einer großen Aufgabe?
- ...

Es wird zusammenfassend gefragt, wobei verwandte Aufgaben helfen können, damit die Kinder sich des Nutzens der erarbeiteten Beziehungen noch einmal bewusst werden. Hierbei kann auch mit einer Stellungnahme gearbeitet werden (z. B. „Youness sagt ‚Wenn ich weiß, was $3 + 5$ ist, ist es einfach, $13 + 5$ auszurechnen.‘ Was meint Youness? (...) Wobei helfen uns verwandte Aufgaben also?“)

Benötigtes Material

Einführung	Arbeitsphase		Weiterführender Gesprächsanlass
<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 3.1 	<ul style="list-style-type: none"> Analogien-Memory 	<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 3.1 Kopiervorlage 3 	<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 3.1
	<ul style="list-style-type: none"> Kleine Aufgaben in großen Aufgaben sehen 	<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 3.2 	
	<ul style="list-style-type: none"> Große Aufgaben finden 	<ul style="list-style-type: none"> Unterrichtsmaterial 3.3 Zwanzigerfeld (mit Plättchen und Streifen) 	

Weitere Fördermöglichkeiten

- Memory mit je einer „kleinen“ und einer „großen“ Aufgabe
- Übertragung von $E + E$ auf $E + ZE$ in höheren Klassen auch auf $Z + Z$, $H + H$, etc.

Verdopplungsaufgaben

Einführung

Es werden verschiedene Verdopplungsaufgaben an einem großen und für alle Kinder gut sichtbaren Zwanzigerfeld dargestellt. Fällt den Schülerinnen und Schülern etwas auf, können sie ihre Ideen direkt äußern. Andernfalls werden die entsprechenden Additionsaufgaben vorab aufgestellt und unter der Darstellung notiert. Im Anschluss folgt der Impuls „Kannst du die Anzahl der Plättchen geschickt erfassen?“ oder „Welche Verdopplungsaufgabe fällt dir zur dargestellten Aufgabe im Zwanzigerfeld ein?“ In dem ersten Fall werden die Aufgaben ebenfalls ergänzt.

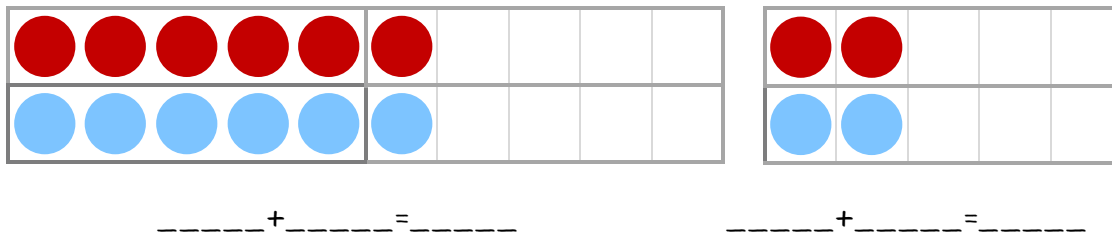


Abb. 14 Einführung zu Verdopplungsaufgaben

Arbeitsphase

Für die Arbeitsphase stehen vier Diagnose- und Förderideen zur Verfügung. Zunächst stehen dabei die Darstellung und das Memorieren einfacher Verdopplungsaufgaben sowie das Erkennen analoger Strukturen im Vordergrund. Anschließend wird der Blick auf Fast-Verdopplungsaufgaben erweitert.

8 Verdopplungsaufgaben darstellungsvernetzend

Ziel: Die Struktur von Verdopplungsaufgaben erkennen und die Summe darstellungsvernetzend bestimmen.

Die Kinder rechnen zunächst formal notierte Verdopplungsaufgaben in Einzelarbeit und übertragen diese in je ein Zwanzigerfeld.

Zeichne ein. Wie viele Plättchen sind es?

$3 + 3 = ___$	$7 + 7 = ___$
$1 + 1 = ___$	$6 + 6 = ___$
$5 + 5 = ___$	$9 + 9 = ___$

Abb. 15 Verdopplungsaufgaben darstellungsvernetzend

Impulse

- Wie kannst du die Plättchen legen, damit es zur Aufgabe passt? Warum?
- Fällt dir noch eine andere Möglichkeit ein, die Plättchen zu legen? Warum geht das auch so? In welcher der beiden Varianten lässt sich die Aufgabe schneller/besser erkennen?

Beobachtungsmöglichkeiten

- Stimmen das Ergebnis und die eingezeichnete Darstellung am Zwanzigerfeld?
- Wie ermittelt das Kind das Ergebnis der jeweiligen Aufgaben (über die Darstellung im Zwanzigerfeld, rechnet erst, ...)?
- Wie zeichnet das Kind die Plättchen ein (hintereinander, untereinander, ...)?

9 Ähnliche Verdopplungsaufgaben

Ziel: Erkennen von analogen Strukturen bei Verdopplungsaufgaben.

In einer weiteren Aufgabe werden Verdopplungsaufgaben in einem Zwanzigerfeld mit Plättchen dargestellt und die Kinder finden die dazugehörigen Aufgaben.

Zusätzlich sollen sie natürlich stets die Summe bestimmen. Beim Vergleich der Summen und beim Darstellen der Zusammenhänge können auch Forschermittel verwendet werden. Beispielsweise lässt sich die Verdopplungsaufgabe $7 + 7$ u. a. in die Verdopplungsaufgaben $5 + 5$ und $2 + 2$ zerlegen. Die 10 Plättchen der Doppel-Fünf lassen sich auch bei allen Verdopplungen einkreisen, deren Summanden ≥ 5 sind. Die Anzahl der restlichen Plättchen kann schnell erfasst werden und entspricht der kleinen Verdopplungsaufgabe. So wird ebenfalls der Zusammenhang bspw. der Verdopplungsaufgaben deutlich.

a) Welche Aufgabe passt?

$2 + 2 = 4$

$7 + 7 = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$

b) Bestimmt die Anzahl geschickt. Zeichnet ein und erklart.

Abb. 16 Ähnliche Verdopplungsaufgaben

Impulse

- Welche Aufgabe passt zu der Darstellung? Warum?
- Hilft dir bei der Aufgabe, dass die verschiedenfarbigen Plättchen untereinanderstehen? Warum?
- Schau dir diese beiden Aufgaben mit den Zwanzigerfeldern nochmal an. Wie hättest du das Ergebnis geschickter bestimmen können?
- Warum unterscheidet sich das Ergebnis der beiden Aufgaben um

Beobachtungsmöglichkeiten

- Passen die Aufgabe und das Ergebnis zu der Darstellung?
- Wie ermittelt das Kind die beiden Summanden der Additionsaufgabe?
- Wie ermittelt das Kind das Ergebnis der Aufgaben (über die Darstellung im Zwanzigerfeld, rechnet erst, ...)?
- Wie erkennt und nutzt es die 10er Strukturen in den größeren Verdopplungsaufgaben und die Analogien zu den kleineren Verdopplungsaufgaben?

10 Fast-Verdopplungsaufgaben

Ziel: Nutzen die Struktur einfacher Verdopplungsaufgaben zum Ermitteln schwieriger Fast-Verdopplungsaufgaben.

Anschließend wird zusätzlich in sog. „Fast-Verdopplungsaufgaben“ eingeleitet. Die Verdopplungsaufgaben werden genutzt, um Aufgaben Plus-Minus-1 geschickt zu bestimmen.

Kannst du auch diese Aufgabe lösen? Zeichne ein. Begründe dein Vorgehen.




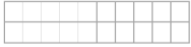
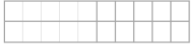
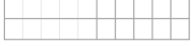
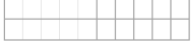
$5 + 4 = \text{---}$	
$5 + 5 = \text{---}$	
$5 + 6 = \text{---}$	
$8 + 8 = \text{---}$	
$8 + 7 = \text{---}$	
$6 + 6 = \text{---}$	
$6 + 7 = \text{---}$	

Abb. 17 Fast-Verdopplungsaufgaben

Impulse

- Wie müsste das Zwanzigerfeld zu der Aufgabe aussehen? Warum?
- Schau dir diese beiden (drei) Aufgaben mit den Zwanzigerfeldern an. Wie kannst du das Ergebnis geschickt bestimmen?
- Warum unterscheidet sich das Ergebnis der beiden Aufgaben um 1?


Beobachtungsmöglichkeiten


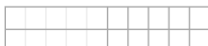
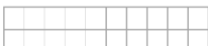
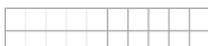
- Passen die Aufgabe und das Ergebnis zu der Darstellung?
- Wie ermittelt das Kind das Ergebnis der Aufgaben (über die Darstellung im Zwanzigerfeld, rechnet erst, ...)?
- Wie erkennt und nutzt es die Verdopplungsaufgabe zur geschickten Bestimmung der Fast-Verdopplungsaufgabe?

11 Fast-Verdopplungsaufgaben erstellen

Ziel: Aufgabenbeziehungen flexibel anwenden, um eigene Fast-Verdopplungsaufgaben zu entwickeln.

Die Lernenden überlegen sich in den Tandems selbst Fast-Verdopplungsaufgaben. Diese sollen anschließend mit anderen Tandems getauscht oder für die Lernkartei bereitgestellt werden und dürfen folglich nicht ausgerechnet oder ausgemalt werden. Anschließend sollen die Kinder erklären, welche einfachen Verdopplungsaufgaben ihnen beim Lösen der Aufgabe geholfen hat (Dabei gibt es immer zwei Verdopplungsaufgaben, $5 + 4 = 9$ lässt sich über die Verdopplungsaufgabe $5 + 5$ und $4 + 4$ lösen).

 a) Findet eigene Fast-Verdopplungsaufgaben. Zeichnet nicht ein.

$\text{---} + \text{---} = \text{---}$	
$\text{---} + \text{---} = \text{---}$	
$\text{---} + \text{---} = \text{---}$	
$\text{---} + \text{---} = \text{---}$	


 b) Tauscht mit einem anderen Tandem. Welche Verdopplungsaufgabe hilft dir? Zeichne ein.

Abb. 18 Fast-Verdopplungsaufgaben erstellen

Impulse

- Bei der Erstellung: Fällt dir eine Verdopplungsaufgabe ein? Was ist eine Fast-Verdopplungsaufgabe? Welche Fast-Verdopplungsaufgaben gibt es zu deiner Verdopplungsaufgabe?
- Bei der Lösung: Welche Nachbaraufgaben gibt es zu dieser Aufgabe? Ist eine der Nachbaraufgaben eine Verdopplungsaufgabe? Wie hilft dir diese dabei, die Fast-Verdopplungsaufgabe geschickt zu lösen?

Beobachtungsmöglichkeiten

- Bei der Erstellung: Findet das Kind eigene Fast-Verdopplungsaufgaben?
- Bei der Lösung: Findet das Kind eine benachbarte Verdopplungsaufgabe?
- Kann das Kind die Verdopplungs- und Fast-Verdopplungsaufgaben der anderen Kinder sowie die Ergebnisse mit den passenden Darstellungen bestimmen?
- Wie geht das Kind dabei vor?

Weiterführender Gesprächsanlass

Der weiterführende Gesprächsanlass findet im Plenum statt. Es gibt verschiedene Darstellungsformen: je ein Zwanzigerfeld, die mathematische Aufgabe und ein Alltagsbild. Die Schülerinnen und Schüler sollen zusammengehörende Karten entdecken und mündlich begründen. Zusätzlich hat sich eine Fast-Verdopplungsaufgabe eingeschlichen. Die Kinder finden die Aufgaben und erklären.

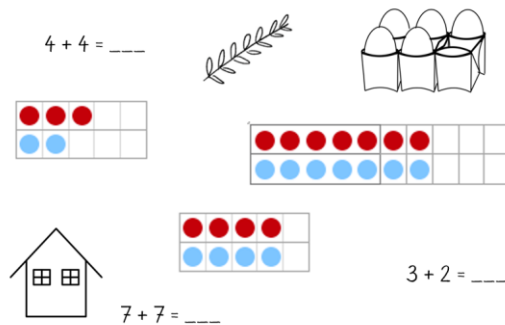


Abb. 19 Weiterführender Gesprächsanlass zu Verdopplungsaufgaben

Einführung	Arbeitsphase		Weiterführender Gesprächsanlass
<ul style="list-style-type: none"> ▪ Großes Zehner- / Zwanzigerfeld (Kopiervorlage 4.1) ▪ Magnet-Wendepättchen 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Verdopplungsaufgaben darstellungsverentzend 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Unterrichtsmaterial 4.1 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Kopiervorlage 4.2
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Ähnliche Verdopplungsaufgaben 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Unterrichtsmaterial 4.2 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Fast-Verdopplungsaufgaben 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Unterrichtsmaterial 4.3 	
	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Fast-Verdopplungsaufgaben erstellen 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Unterrichtsmaterial 4.4 	

Weitere Förderideen

- Ebenfalls können Halbierungsaufgaben thematisiert werden
- Darauf aufbauend schwierige (Fast-)Verdopplungsaufgaben einfachen Aufgaben (z. B. +1, +5, +10) zuordnen