

Basistext

Mathematische Basiskompetenzen und tragfähiges Zahlverständnis zum Schulanfang

Hedwig Gasteiger, Julia Bruns

Februar 2022



Dieses Material wurde von Hedwig Gasteiger und Julia Bruns entwickelt. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Gasteiger, H. & Bruns, J. (2022): Mathematische Basiskompetenzen und tragfähiges Zahlverständnis zum Schulanfang – Basistext. Open Educational Resources.

Projektherkunft

Dieses Material wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet und wird auch im Projekt QuaMath weiter genutzt (beide Projekte gemeinsam von den Ländern finanziert).

Hinweis zu verwandtem Material

- Förderbausteine zu Zählfähigkeiten, zum Mengenverständnis, zum Operationsverständnis: DZLM_DiFPrim_Basiskompetenzen_Foerdern_Zahlen.pdf, -Mengen.pdf, -Operationen.pdf
- Förderdiagnostische Eingangserhebung: DZLM_DiFPrim_Basiskompetenzen_Foerderdiagnostik.pdf

Mathematische Basisfähigkeiten und tragfähiges Zahlverständnis zum Schulanfang

Zahlreiche Studienergebnisse weisen auf die hohe Bedeutung mathematischer Basiskompetenzen, also der mathematischen Fähigkeiten, vor Schuleintritt für spätere mathematische Leistungen der Kinder in der Schule hin (bspw. Krajewski & Schneider, 2006; Nguyen et al., 2016). Diese Studien belegen, dass Kinder, die bereits vor Schuleintritt zentrale mathematische Basiskompetenzen erworben haben, wie bspw. zwei Mengen miteinander zu vergleichen, diesen Vorsprung in den mathematischen Fähigkeiten nicht nur am Ende der Grundschule (bspw. Krajewski & Schneider, 2006) sondern auch noch am Ende der Sekundarstufe I (bspw. Duncan et al., 2007) beibehalten. Die frühen mathematischen Kompetenzen vor der Grundschule haben dabei einen größeren Einfluss auf die später gemessenen Kompetenzen im Fach Mathematik, als sprachliche Kompetenzen oder kognitive Fähigkeiten (Watts et al., 2014). Konkret bedeutet dies: Die mathematischen Kompetenzen zu Schulbeginn sind richtungsweisend für die Entwicklung der mathematischen Leistungen über die gesamte Schullaufbahn.

Dies kann unter anderem darauf zurückgeführt werden, dass Mathematik als Fach hierarchisch aufgebaut ist, das heißt Lücken, die einmal entstanden sind, werden im Lauf der Zeit eher größer, als dass sie verschwinden. Dies kann gerade in der Situation, in der aufgrund der Schulschließungen in der Pandemiezeit, nicht gewährleistet werden konnte, dass Kinder herausfordernde Anregungen für ihre frühe mathematische Entwicklung bekommen haben, problematisch werden. Um Kinder daher bestmöglich in ihrem mathematischen Lernen unterstützen zu können, ist es unabdingbar, sich einen guten Überblick über die individuellen Lernvoraussetzungen bzw. das fachspezifische Vorwissen der Kinder zu verschaffen, um gegebenenfalls frühzeitig fördernd handeln zu können.

Es gibt wissenschaftliche Erkenntnisse dazu, welche Fähigkeiten für das mathematische Weiterlernen als absolut grundlegend angesehen werden (bspw. Dornheim, 2008; Krajewski, 2003; Nguyen et al., 2016; Weißhaupt et al., 2006) – wir nennen sie mathematische Basisfähigkeiten oder Basiskompetenzen. Im Rahmen einer Förderung zu Schulbeginn ist es sinnvoll, sich zunächst auf diese Basiskompetenzen zu fokussieren. In erster Linie sind es Kompetenzen zum Zählen, zur Mengenerfassung und ein erstes Verständnis für Zahlzerlegungen oder einfache Rechenanforderungen, die sich in vielen Studien als Kompetenzen mit einer gewissen Vorhersagekraft für das spätere Mathematiklernen erwiesen haben. Die Teilfähigkeiten zu diesen drei Bereichen sollen im Folgenden im Detail betrachtet werden.

1 Zählfähigkeiten

Zahlwortreihe und flexibles Zählen

Eine der zentralen Basiskompetenzen zu Schulbeginn ist das „Zählen können“. Dazu gehört zunächst, dass die Kinder die Zahlwortreihe beherrschen – und zwar möglichst flexibel und reversibel. Das bedeutet, dass Kinder die Zahlwörter erstmal in der richtigen Reihenfolge nennen können. Von einem flexiblen Gebrauch der Zahlwortreihe spricht man, wenn Kinder die Zahlwörter nicht mehr wie ein Gedicht aufsagen, sondern die Zahlwörter in der richtigen Reihenfolge nennen, aber auch jedes einzelne Zahlwort als einzelnen Baustein wahrnehmen. Nur dann können sie z. B. beim Zahlwort „vier“ starten und mit „fünf“, „sechs“, „sieben“ drei Schritte weiterzählen – eine wichtige Fähigkeit für das erste Addieren. Ein reversibler Gebrauch der Zahlwortreihe ist gegeben, wenn die Kinder auch rückwärts zählen können – diese Kompetenz ist wiederum eine wichtige Voraussetzung für das erste Subtrahieren.

Zahlwortreihe und flexibles Zählen: Gute Ausgangsbedingungen zu Schulbeginn

Zu Schulbeginn können viele Kinder bis zehn zählen, sie können zum Teil rückwärts zählen und verfügen über eine flexible Zahlwortreihe, das heißt, sie können auch ein paar Schritte von einem gegebenen Zahlwort weiterzählen.

Objekte zählen

Die Zahlwortreihe zu beherrschen ist zwar eine Grundvoraussetzung dafür, Objekte zählen zu können, reicht allein jedoch nicht aus. Um die Anzahl der Objekte einer Menge zählen zu können, muss das Kind folgende fünf Prinzipien berücksichtigen (Gelman & Galistel, 1986):

- (1) **Prinzip der stabilen Ordnung:** Die Zahlwörter werden in der richtigen Reihenfolge genannt.
- (2) **Eindeutigkeitsprinzip:** Jedem zu zählendem Objekt wird genau ein Zahlwort zugeordnet.
- (3) **Kardinalzahlprinzip:** Das letztgenannte Zahlwort im Zählprozess beantwortet die Frage „Wie viele sind es?“ – diese Konvention ist für Kinder zu Beginn nicht selbstverständlich.
- (4) **Abstraktionsprinzip:** Es kann alles gezählt werden – gleiche aber auch gänzlich verschiedene Objekte.
- (5) **Prinzip der Irrelevanz der Anordnung:** Man kann die Objekte in verschiedener Reihenfolge zählen, das Zählergebnis ändert sich nicht. Dies gilt auch, wenn die Objekte beim Zählen verschoben werden – eine wichtige Zählstrategie um den Überblick zu bewahren.

Objekte zählen: Gute Ausgangsbedingungen zu Schulbeginn

Wenn Objekte bis zu zehn, oder soweit, wie die Zahlwortreihe beherrscht wird, sicher abgezählt werden können und die Frage „Wie viele sind es?“ beantwortet werden kann, ist eine Grundlage gegeben, auf die der Unterricht in Jahrgangsstufe 1 aufbauen kann.

2 Mengenverständnis

Strukturen erkennen, Mengen erfassen

Strukturen zu erkennen und zu nutzen hat sich ebenfalls als wichtige mathematische Basiskompetenz von Kindern zu Schulbeginn erwiesen. Mengen mit wenigen Objekten sollten Kinder auch ohne Zählen auf einen Blick erfassen können – dies nennt man Simultanerfassung. Allerdings gelingt dies auch Erwachsenen bei Mengen mit mehr als sechs Objekten kaum noch. Um Mengen mit einer größeren Anzahl von Objekten erfassen zu können, ist es erforderlich, Strukturen zu erkennen und diese zu nutzen. Dies wird Quasi-Simultanerfassung genannt. Erste Strukturen können beispielsweise Würfelbilder oder auch die Finger sein. Zeigt man dem Kind acht Finger und es muss nicht alle Finger zählen, sondern kann sagen „Ah, das sind fünf, sechs, sieben, acht!“ oder sogar „das sind acht: fünf und drei“, dann ist eine wichtige Grundvoraussetzung dafür gegeben, dass die Kinder sich auch größere Mengen vorstellen und mit diesen gedanklich agieren können. Dies ist wiederum eine Grundvoraussetzung für ein anschlussfähiges erstes Rechnen, das sich von einem Zählen unterscheidet.

Strukturen erkennen, Mengen erfassen: Gute Ausgangsbedingungen zu Schulbeginn

Gelingt es den Kindern, Mengen auf einen Blick zu erfassen und dabei zum Teil auch Strukturen, wie die Würfel-Fünf oder die Struktur der fünf Finger an einer Hand, zu nutzen, ist eine wichtige Grundlage gegeben, auf die im Mathematikunterricht aufgebaut werden kann. Zudem ist es eine gute Basis für den Mathematikunterricht, wenn Kinder Mengen bis drei oder vier auch ohne zu zählen, also simultan, erfassen können.

Mengenvergleich

Zu dem Bereich des Mengenverständnisses gehört, dass Mengen verglichen werden können: „Das sind mehr; das sind weniger.“ Wichtig ist dabei, dass sich Kinder nicht allein auf ihre Wahrnehmung verlassen, sondern auch erste Strategien zum Vergleichen anwenden können. Rein wahrnehmungsgelitetes Vergleichen kann dazu führen, dass z. B. Kinder angeben, fünf Bauklötze wären mehr als fünf Legosteine, weil die Legosteine nicht so viel Platz einnehmen. Vergleichsstrategien wären z. B. die sogenannte Eins-zu-Eins-Zuordnung (jeder Legostein wird neben einen Bauklotz gelegt, um zu sehen, dass es gleich viele Objekte in beiden Mengen sind) oder das Vergleichen mithilfe des Zählens.

Mengenvergleich: Gute Ausgangsbedingungen zu Schulbeginn

Ein erstes Verständnis für Mengen zeigt sich, wenn Kinder Mengen vergleichen können und dafür auch geeignete Strategien anwenden können bzw. sich nicht allein durch die Wahrnehmung leiten lassen.

3 Operationsverständnis

Verständnis für Mengenerlegungen

Zu einem tragfähigen Operationsverständnis gehört zunächst das Verständnis, dass sich die Anzahl der Objekte einer Menge nicht verändert, wenn nichts dazukommt oder nichts weggenommen wird (*Verständnis der Invarianz*). Zusätzlich ist das sogenannte Teile-Ganzes-Verständnis eine zentrale Voraussetzung für den Mathematikunterricht. Letzteres zeigt sich beim Kind, wenn es versteht, dass man ein Ganzes, beispielsweise die Menge von sieben Bonbons, in kleinere Mengen aufteilen kann, die zusammen wieder das Ganze ergeben. Das Teile-Ganzes-Verständnis umfasst so ein Verständnis für erste (Zahl-)Zerlegungen. Das heißt beispielsweise für die sieben Bonbons, dass man diese an zwei Kinder ganz unterschiedlich verteilen kann: zwei und fünf Bonbons, vier und drei, eines und sechs oder auch alle sieben für ein Kind und das zweite Kind bekommt kein Bonbon. Die beiden Teilmengen (es können natürlich auch mehr als zwei sein) ergeben immer das Ganze.

Verständnis für Mengenerlegungen: Gute Ausgangsbedingungen zu Schulbeginn

Ein anschlussfähiges Verständnis für Mengenerlegungen zeigt sich, wenn ein erstes Teil-Ganzes-Verständnis vorhanden ist – also eine Menge in verschiedene Teilmengen zerlegt werden kann und die Teilmengen gemeinsam als die Gesamtmenge betrachtet werden können.

Erste Rechenfähigkeiten

Das erfolgreiche Bewältigen einfacher Rechengeschichten, die die Kinder mit und ohne Material lösen, hat sich ebenfalls als eine Kompetenz erwiesen, die Vorhersagekraft für das spätere Mathematiklernen hat. Darunter sind z. B. Aufgabenstellungen zu verstehen, wie „Du hast 9 Bonbons und verlierst 3“ (Dornheim, 2008). In der Regel lösen Kinder die Aufgaben mit einem Weiter- bzw. hier mit einem Rückwärtszählen (s. o. Zahlwortreihe) oder sie nutzen dafür bereits ein Verständnis von Strukturen im Sinne von 9 Finger und 3 Finger weg, das sind 6, eins mehr als 5.

Erste Rechenfähigkeiten: Gute Ausgangsbedingungen zu Schulbeginn

Erstes Rechnen ist in jedem Fall Thema des Unterrichts in Jahrgangsstufe 1. Wenn das Kind aber bereits ein erstes Verständnis für Situationen zeigt, die rechnerisch bearbeitet werden können, dann zeigt das Kind mathematische Vorkenntnisse, die einen guten Anschluss in der Schule ermöglichen, aber nicht prioritär zu sehen sind.

4 Material zur Förderung und Diagnose

Damit Kinder mit guten Ausgangsbedingungen in den Mathematikunterricht starten, bedarf es einer fundierten Diagnose und Förderung der Kompetenzen, die Vorhersagekraft für das schulische Mathematiklernen haben. Genau zu diesem Zweck wurden, passend zu diesem Basistext, eine Handreichung mit förderdiagnostische Aufgaben zu den mathematischen Basiskompetenzen sowie drei Förderbausteine zu den Themen Zählfähigkeiten, zum Mengenverständnis und zum Operationsverständnis entwickelt, die ebenfalls als OER-Materialien beim DZLM verfügbar sind.

Literatur

- Dornheim, D. (2008). Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche: der Beitrag von Zahlen-Vorwissen und allgemein-kognitiven Fähigkeiten. Logos.
- Duncan, G. J., Dowsett, C. J., Claessens, A., Magnuson, K., Huston, A. C., Klebanov, P. et al. (2007). School Readiness and Later Achievement. *Developmental Psychology*, 43(6), 1428–1446. <https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428>
- Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Harvard University Press.
- Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule* (1. Auflage). Kovac.
- Krajewski, K. & Schneider, W. (2006). Mathematische Vorläuferfertigkeiten im Vorschulalter und ihre Vorhersagekraft für die Mathematikleistungen bis zum Ende der Grundschulzeit. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 53(4), 246–262.
- Nguyen, T., Watts, T. W., Duncan, G. J., Clements, D. H., Sarama, J. S., Wolfe, C. et al. (2016). Which preschool mathematics competencies are most predictive of fifth grade achievement? *Early Childhood Research Quarterly*, 36, 550–560. <https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2016.02.003>
- Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S., & Davis-Kean, P. E. (2014). What's Past Is Prologue: Relations Between Early Mathematics Knowledge and High School Achievement. *Educational Researcher*, 43(7), 352–360. <https://doi.org/10.3102/0013189X14553660>
- Weißhaupt, S., Peucker, S., & Wirtz, M. (2004). Diagnose mathematischen Vorwissens im Vorschulalter und Vorhersage von Rechenleistungen und Rechenschwierigkeiten in der Grundschule. *Psychologie in Erziehung und Unterricht*, 0(4), 236-245.