

Didaktischer Kommentar zum Unterrichtsmaterial **Stellenwerte üben – Darstellungen vernetzen (Zahlen bis 100/bis 1 000)**

Laura Geldermann, Nadine da Costa Silva & Katrin Rolka

Oktober 2023



Dieses Material wurde von Laura Geldermann, Nadine da Costa Silva und Katrin Rolka entwickelt. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Geldermann, L., da Costa Silva, N. & Rolka, K. (2023). Didaktischer Kommentar zum Unterrichtsmaterial Stellenwerte üben – Darstellungen vernetzen (Zahlen bis 100/bis 1 000). Online frei zugreifbar unter <https://maco.dzlm.de/node/54>.

Projektherkunft

Dieser Förderbaustein wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet und wird auch im Projekt QuaMath weiter genutzt (beide Projekte gemeinsam von den Ländern finanziert).

**Hinweis zu
verwandtem Material**

Weitere Materialien sind auf der gleichen Webseite wie das Material selbst zu finden.

Hintergründe zum Unterrichtsmaterial

„Stellenwerte üben – Darstellungen vernetzen“

Für ein sicheres Stellenwertverständnis sind unterschiedliche Darstellungen von Zahlen, wie beispielsweise am Punktfeld oder Zahlenstrahl, und ihre Vernetzung zentral (Padberg & Benz 2021). Die Vernetzung von Darstellungen geht über den Wechsel zwischen Darstellungen hinaus, da sie auch das Unterscheiden, Zuordnen und in Beziehung setzen umfasst. Die Vernetzung gilt als wesentliche Grundlage für einen flexiblen Umgang mit Darstellungen, welcher Verstehensprozesse unterstützen kann (Prediger & Wessel 2011).

Vor dem Hintergrund eines sicheren Stellenwertverständnisses sind das Prinzip der fortgesetzten Bündelung und das Positionsprinzip für den Umgang mit Darstellungen zentral (Schulz & Wartha 2021; Scherer & Moser Opitz 2010). Zur Veranschaulichung des Prinzips der fortgesetzten Bündelung eignet sich insbesondere das Dienes Material (s. u.). Hier können 10 Einerwürfel gegen eine Zehnerstange, 10 Zehnerstangen gegen eine Hunderterplatte und 10 Hunderterplatten gegen einen Tausenderwürfel getauscht werden. Die Einheiten können auch wieder entbündelt werden, indem beispielsweise eine Zehnerstange gegen 10 Einerwürfel getauscht wird (Scherer & Moser Opitz 2010). Das Positionsprinzip wird beispielsweise bei der Betrachtung der Zahlen 5, 50 und 55 deutlich. Die Ziffer 5 hat hier den Wert von 5 Einern oder von 5 Zehnern, je nachdem, an welcher Stelle sie sich in den Zahlen befindet. Außerdem ist das Positionsprinzip für den Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen relevant.

Zahlen können auf enaktiver, ikonischer und symbolischer Ebene dargestellt werden (Bruner 1974). Ein Darstellungswechsel kann dementsprechend zwischen verschiedenen Repräsentationsebenen, etwa von der ikonischen zur symbolischen Ebene, aber auch innerhalb derselben Repräsentationsebene stattfinden. Ein Wechsel innerhalb einer bestimmten Repräsentationsebene ist sowohl mit unterschiedlichen Arbeitsmitteln als auch mit demselben Arbeitsmittel möglich (Krauthausen 2018). Darstellungswechsel stellen eine Übersetzungsleistung dar, und insbesondere durch die Vernetzung kann zur Reflexion der Besonderheiten der einzelnen Darstellungen sowie ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede angeregt werden (Schulz & Wartha 2021). Dies wird beispielsweise bei dem Darstellungswechsel vom Punktfeld zum Dienes Material deutlich, da sich die Darstellungen in ihrer Struktur in Form von Punkt und Einerwürfel, Zeile mit 10 Punkten und Zehnerstange, sowie Hunderter-Punktfeld und Hunderterplatte ähnlich sind. Soll eine Zahl mit demselben Material auf verschiedene Weise dargestellt werden, so kann dies beispielsweise in Form von verschiedenen Markierungsstrategien für Punktfelder oder unterschiedlichen Darstellungen von Zahlen mit Dienes Material und Rechengeld geschehen. Dementsprechend kann zum Beispiel die Zahl 28 mit 2 Zehnerstangen und 8 Einerwürfeln, oder auch mit 1 Zehnerstange und 18 Einerwürfeln dargestellt werden. Grundsätzlich sind Wechsel zwischen allen Darstellungen, sowohl innerhalb der Repräsentationsebenen als auch zwischen ihnen, möglich.

Der Wechsel zwischen und die Vernetzung von Darstellungen tragen außerdem zu einer Vernetzung der Zahlaspekte bei, da diese je nach Darstellung unterschiedlich berücksichtigt werden. Für die verschiedenen Darstellungen sind der kardinale (Mächtigkeit einer Menge) und der ordinale Zahlaspekt (Anordnung der Zahlen) von besonderer Bedeutung. Für ein sicheres Stellenwertverständnis gilt es, beide Zahlaspekte zu fördern und miteinander in Beziehung zu setzen (Schulz & Wartha 2021).

Durch den gezielten Einsatz verschiedener Darstellungen können die Schüler:innen die Zusammenhänge der genannten Prinzipien und Zahlaspekte erfahren (Schulz & Wartha 2021). Im vorliegenden Unterrichtsmaterial arbeiten die Schüler:innen mit additiven Zerlegungen, dem Dienes Material, am Hunderter- bzw. Tausender-Punktfeld, an der Hundertertafel, mit Rechengeld, am

Zahlenstrahl und mit der Stellentafel. Da das Unterrichtsmaterial zum Üben und Vertiefen gedacht ist, setzt es voraus, dass die Schüler:innen bereits mit den Arbeitsmitteln und Darstellungsformen vertraut sind. Im Folgenden werden die Arbeitsmittel und Darstellungen im Einzelnen vorgestellt und hinsichtlich der genannten Prinzipien und Zahlaspekte erläutert.

Additive Zahlzerlegung

Im dezimalen Stellenwertsystem lassen sich Zahlen durch Addition ihrer Stellenwerte (z. B. $234 = 200 + 30 + 4$) darstellen, denn die Summe entspricht dem Gesamtwert der Zahl. Für eine solche Zerlegung benötigen die Schüler:innen Wissen über die Mächtigkeit der einzelnen Stellenwerte, die durch die Nullen in den Summanden sichtbar wird (Selter et al. 2014a).

Dienes Material

Das Dienes Material (vgl. Abb. 1) besteht aus Einerwürfeln, Zehnerstangen, Hunderterplatten und Tausenderwürfeln, wobei letztere in diesem Unterrichtsmaterial nicht eingesetzt werden. Da beim Dienes Material die Darstellung der Mächtigkeit einer Menge im Vordergrund steht, stellt es den kardinalen Zahlaspekt heraus.

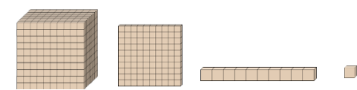


Abb. 1: Dienes Material

Für das Üben von Stellenwerten hat das Dienes Material den besonderen Vorteil, dass es durch seine Strukturiertheit die Beziehungen zwischen den Einern, Zehnern und Hundertern (Selter et al. 2014b) und auch das Prinzip der fortgesetzten Bündelung veranschaulicht (Schulz & Wartha 2021).

Das Dienes Material ist außerdem hilfreich für das stellengerechte Schreiben symbolischer Zahlen: Werden die Einheiten ihrer Größe nach sortiert, so entsprechen die Positionen den Stellenwerten der notierten Zahlen, sofern beim Aufschreiben von links nach rechts vorgegangen und vollständig gebündelt wird. Auch die additive Zerlegung einer Zahl in ihre Stellenwerte lässt sich mit dem Dienes Material visualisieren. Bei der Übersetzung vom Dienes Material in eine symbolische Notation als Zahl können Schwierigkeiten auftreten, wenn das Fehlen einer Einheit nicht bemerkt wird (Schulz & Wartha 2021), wie zum Beispiel die nicht besetzte Zehnerstelle bei der konventionellen Darstellung der Zahl 303 mit dem Dienes Material.

Hunderter- bzw. Tausender-Punktfeld

Mit dem Hunderter- bzw. Tausender-Punktfeld (vgl. Abb. 2) kann das strukturierte Darstellen und Ablesen von Zahlen geübt werden. Außerdem kann mit den Punktfeldern die Entwicklung von Größenvorstellungen unterstützt und der kardinale Zahlaspekt veranschaulicht werden (Scherer & Moser Opitz 2010). Hinsichtlich der Zahldarstellung sind beim Hunderter- bzw. Tausender-Punktfeld verschiedene Möglichkeiten denkbar (z. B. horizontal, vertikal, usw.). Es ist daher sinnvoll, verschiedene Markierungsstrategien und Deutungen im Unterricht zu thematisieren und zu reflektieren.

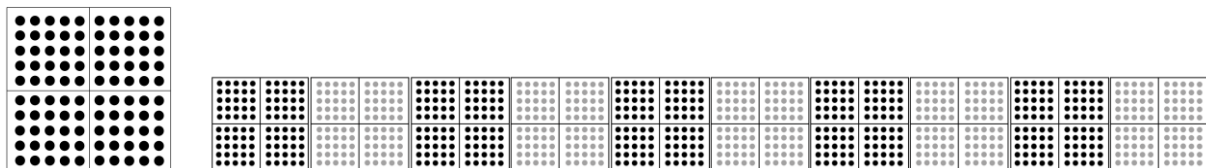


Abb. 2: Hunderter- bzw. Tausenderpunktfeld

Hundertertafel bzw. Zahlseiten aus dem Tausenderbuch

Mit der Hundertertafel und den Zahlseiten aus dem Tausenderbuch (vgl. Abb. 3) wird der ordinale Zahlaspekt angesprochen, denn hier stehen die Positionen der Zahlen im Vordergrund. Der Zahlenraum in seiner Gesamtheit ist jedoch ebenfalls sichtbar. Die Hundertertafel veranschaulicht sowohl Zahlaufbau als auch Zahlschreibweise und bietet sich daher zum Erkunden und Entdecken von Mustern und Strukturen an (Scherer & Moser Opitz 2010). Weitere Aufgaben zum Erkunden von Mustern und Strukturen mit dem Tausenderbuch bietet das Unterrichtsmaterial „Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1 000)“ (Bertram et al. 2023).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Abb. 3: Hundertertafel bzw. Tausenderseite aus dem Tausenderbuch

Rechengeld

Das Rechengeld (vgl. Abb. 4) weist einen starken Alltagsbezug auf. Für den Umgang mit Geld sind ein sicheres Stellenwertverständnis und insbesondere das Prinzip der fortgesetzten Bündelung grundlegend (Scherer & Moser Opitz 2010). Dabei wirkt sich seine vielfältige, nicht nur dezimale Strukturierung auf das Bündeln und Entbündeln aus. So kann beispielsweise ein 10-Euro-Schein in zwei 5-Euro-Scheine entbündelt werden oder zwei 10-Euro-Scheine zu einem 20-Euro-Schein gebündelt werden. Die möglichen zusätzlichen Anforderungen, die das Arbeitsmittel mit sich bringt, müssen daher von der Lehrperson mit Blick auf die Schüler:innen geprüft werden. Außerdem gibt es nicht immer eine eindeutige Darstellung, sodass zwischen verschiedenen Darstellungen einer Zahl mit demselben Arbeitsmittel gewechselt werden kann (z. B. 2 Euro mit einem 2-Euro-Stück oder mit zwei 1-Euro-Stücken).



Abb. 4: Rechengeld

Zahlenstrahl

Ein Zahlenstrahl (vgl. Abb. 5) kann beliebig große Zahlenräume und auch Ausschnitte dieser repräsentieren. Er bildet die lineare Anordnung der Zahlen ab und fokussiert somit den ordinalen Zahlaspekt (Scherer & Moser Opitz 2010). Insbesondere durch seine Übertragbarkeit auf große Zahlenräume bietet er vielfältige Chancen, um die zentralen Strukturen des Dezimalsystems zu erfahren (Freeseemann 2014). Eine Schwierigkeit kann darin bestehen, dass die Schüler:innen zunächst überlegen müssen, welcher Ausschnitt dargestellt ist und welche Skalierung vorliegt (da Costa Silva & Rolka 2023). Um Zahlen an einem Zahlenstrahl darzustellen und zu erkennen, müssen außerdem die Striche und Zwischenräume eines Zahlenstrahls gedeutet werden. Weitere Vorschläge zum Üben mit dem Zahlenstrahl liefert das Unterrichtsmaterial „Stellenwerte üben am Zahlenstrahl/-strich (Zahlen bis 10 000)“ (da Costa Silva & Rolka 2023).



Abb. 5: Zahlenstrahl

Stellentafel

In der Stellentafel (vgl. Abb. 6) werden die Stellenwerte einer Zahl als Ziffern notiert und bei vollständiger Bündelung die einzelnen Bündel sichtbar. Damit ist das Prinzip der fortgesetzten Bündelung zentral. Da die Mächtigkeit der einzelnen Stellenwerte fokussiert wird, kann die Darstellung kardinal interpretiert werden (Schulz & Wartha 2021).

H	Z	E

Abb. 6: Stellentafel

Ogleich die Einheiten in der Regel vollständig gebündelt werden, sind auch andere Darstellungsformen möglich.

Eine Zahldarstellung mit mehrstelligen Zahlen an einer Stelle macht die Beziehung zwischen den Stellenwerten sichtbar und wird als „Zauberzahl“ (Scherer & Steinbring 2004, S. 166) bezeichnet. Die Thematisierung derartiger Zahldarstellungen kann dazu anregen, den Aufbau von Zahlen und deren dezimale Strukturen zu reflektieren (Selter et al. 2014b). Insbesondere für den Übersetzungsprozess zur symbolischen Notation der Zahl sollten die Schüler:innen die Einheiten zunächst deuten und entsprechend zusammenfassen, denn sonst besteht die Gefahr, dass sie beispielsweise aus der Darstellung 5Z 12E in der Stellentafel die Zahl 512 statt der Zahl 62 bilden. Durch die Darstellungsvernetzung mit der symbolischen Notation der Zahl wird außerdem deutlich, ob ein Verständnis für unbesetzte Positionen in der Stellentafel vorhanden ist (Scherer & Moser Opitz 2010). Da bei der Nutzung des Arbeitsmittels von den Schüler:innen nicht verlangt wird, leere Stellen mit einer Null zu besetzen, sollte die Funktion der Null als Platzhalter in der symbolischen Darstellung unbedingt thematisiert werden (Schulz & Wartha 2021).

Didaktische Hinweise zu den einzelnen Aufgaben

Das Unterrichtsmaterial liegt in strukturgleicher Form für den Hunderter- und für den Tausenderraum vor. Die Analogie zeigt sich sowohl in den Aufgaben als auch in den gewählten Zahlen, wobei der Tausenderraum mehr Möglichkeiten eröffnet und den Schüler:innen in diesem Unterrichtsmaterial an einzelnen Stellen zusätzliche Teilaufgaben zur Verfügung stehen. Die Unterrichtsmaterialien können im differenzierten Unterricht parallel eingesetzt werden und ermöglichen durch ihren strukturanalogen Aufbau einen fachlichen Austausch über die Aufgaben, unabhängig davon, in welchem Zahlenraum gearbeitet wurde. Die folgenden didaktischen Hinweise werden für das Unterrichtsmaterial zum Hunderterraum gegeben und gelten in der Regel analog für die Aufgaben im Tausenderraum. Falls nötig, wird allerdings auf Unterschiede im Unterrichtsmaterial für den Tausenderraum eingegangen.

Im Unterrichtsmaterial steht den Aufgaben eine Übersicht voran, in der am Beispiel der Zahl 47 (bzw. 247) gezeigt wird, wie verschiedene Arbeitsmittel gezeichnet werden können und wie mit unterschiedlichen Darstellungen gearbeitet werden kann. Alternativ können beispielsweise die Punkte im Punktfeld eingekreist oder Zahlen, die mit dem Dienes Material gelegt werden, fotografiert werden. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass der handelnde Umgang mit Dienes Material und Rechengeld unterstützend sein kann, aber für die Bearbeitung der Aufgaben in diesem Unterrichtsmaterial nicht unbedingt erforderlich ist.

1 Eine Zahl – Viele Darstellungen

Dieser erste Aufgabenblock fordert die Schüler:innen zur Darstellungsvernetzung auf und regt sie durch Darstellungswechsel zu einem flexiblen Umgang mit unterschiedlichen Repräsentationsebenen und Darstellungen an. Die Zahlen, die in den Aufgabenteilen dargestellt und miteinander verglichen werden sollen, adressieren insbesondere das Positionsprinzip.

Zielsetzung der Aktivitäten, Lösungsstrategien und Umgang mit möglichen Schwierigkeiten

In Aufgabe 1.1 soll jeweils eine Zahl unterschiedlicher Form dargestellt werden. Es schließt eine Reflexionsfrage zur Vernetzung der Darstellungen an, um einen Vergleich der Zahlen und der Arbeitsmittel anzuregen.

In Aufgabenteil a) werden die Darstellungen der Zahlen 32 und 62 in ihrer additiven Zerlegung, am Hunderter-Punktfeld und mit dem Dienes Material in den Blick genommen. Die unterschiedliche Anzahl der Zehner und die gleiche Anzahl an Einern zeigt sich in den verschiedenen Darstellungen auf unterschiedliche Art und Weise. Eine starke Parallele in der Darstellung lässt sich aufgrund der einzelnen Punkte und Würfel, Zehnerreihen und Zehnerstangen, (dem einzelnen Hunderter-Punktfeld und der Hunderterplatte) zwischen dem Hunderter-Punktfeld (bzw. Tausender-Punktfeld) und dem Dienes Material identifizieren. Der Aufgabenteil b), in dem jeweils eine Zahl an der Hundertertafel (auf einer Zahlseite aus dem Tausenderbuch) und am Zahlenstrahl dargestellt werden soll, erweitert das Repertoire der Darstellungsmöglichkeiten. Bei beiden Darstellungen wird die Zeile oder Spalte in der Hundertertafel (und die entsprechende Zahlseite im Tausenderbuch) bzw. der Abschnitt am Zahlenstrahl für das Eintragen der Zahl identifiziert. Die Zahlen 51 und 57 unterscheiden sich an der Einerstelle, während die Zehner gleich sind. Daher befinden sich beide in der Hundertertafel in derselben Zeile und am Zahlenstrahl in demselben Abschnitt. In Aufgabenteil c) wird die Stellentafel aufgegriffen. Die Schüler:innen sollen zunächst mehrere Stellentafeln mit selbstgewählten Ziffern vervollständigen. Dabei ist die Zahl 8 in drei Stellentafeln an der Einerstelle und in weiteren drei Stellentafeln an der Zehnerstelle vorgegeben. Im Unterrichtsmaterial zum Tausenderraum ist die Einerstelle durch die Ziffer 0 vorgegeben, um das Eintragen am Zahlenstrahl zu erleichtern. Die Zehner- bzw. Hunderterstelle wird analog zum Material im Hunderterraum mit der Ziffer 8 besetzt. Anschließend sollen die Schüler:innen die erhaltenen Zahlen am Zahlenstrahl und mit dem Dienes Material darstellen. Durch diese Aktivität wird die Eigentätigkeit der Schüler:innen erhöht. Erneut sollen die Zahlen hinsichtlich unterschiedlicher Zehner und Einer in den Darstellungen verglichen werden, um zur Reflexion der Stellenwerte und einer Vernetzung der Darstellungen anzuregen.

Mit Aufgabe 1.2 werden unterschiedliche Darstellungsmöglichkeiten innerhalb eines Arbeitsmittels thematisiert. Dazu wird die Zahl 46 in Aufgabenteil a) am Hunderter-Punktfeld auf drei verschiedene Arten dargestellt. Die Schüler:innen sollen entscheiden und begründen, in welcher Darstellung sie die Zahl am schnellsten erkennen können. Alle drei Darstellungen bilden die Zahl korrekt ab, jedoch kann sie insbesondere bei der dritten Möglichkeit, bei welcher jeweils eine Zeile freigelassen wurde, nicht so schnell erfasst werden. Anschließend werden in Aufgabenteil b) drei verschiedene Möglichkeiten gezeigt, die Zahl 46 mit dem Dienes Material darzustellen. Bei strukturierter Darstellung wird die Parallele zwischen den verschiedenen Arbeitsmitteln deutlich, die von den Schüler:innen im Rahmen der Aufgabe erkannt werden soll.

In der anschließenden Aufgabe 1.3 wird der Frage nachgegangen, wie sich Darstellungen von Zahlen durch einfache Additionen und Subtraktionen verändern. Dazu werden zwei Schüler:innen und ihre Arbeitsmittel vorgestellt: Emre arbeitet am Hunderter-Punktfeld und Lisa mit dem Dienes Material. Beide starten mit der Zahl 38 und fügen in Aufgabenteil a) fünf Einer hinzu. Emre erkennt die neue Zahl sofort, da er die Einer im Hunderter-Punktfeld fortlaufend markieren kann. Da beim Dienes Material bei dieser Aufgabe das Bündeln nötig ist, muss Lisa zunächst einen weiteren Zehner bündeln, bevor sie das Ergebnis schnell erkennen kann. In der Teilaufgabe b) werden zu der Zahl 38 drei Zehner hinzugefügt. Diesmal erkennt Lisa das Ergebnis schneller, weil sie die Zehnerstangen direkt hinzufügen kann, während Emre die Zahl aufgrund der unmarkierten Einer nicht direkt ablesen kann. Die Teilaufgaben c), d) und e) erfordern von den Schüler:innen eine höhere Eigenaktivität, da sie die Zahlen

nun selbst darstellen müssen. In Aufgabenteil c) wird die Subtraktion am Hunderter-Punktfeld und mit dem Dienes Material thematisiert. Um von der Zahl 38 neun Einer subtrahieren zu können, ist es für die Arbeit mit dem Dienes Material notwendig, zunächst einen Zehner zu entbündeln. Dies kann für die Schüler:innen herausfordernd sein, allerdings wurde das Bündeln in Teilaufgabe a) bereits vorbereitet. In den nachfolgenden Teilaufgaben d) und e) sollen weitere Additions- und Subtraktionsaufgaben in der Stellentafel, Hundertertafel und mit dem Dienes Material dargestellt werden. Hier kann beispielsweise beobachtet werden, dass die Zahl 23 (Ergebnis in Teilaufgabe d)) in der Hundertertafel in derselben Spalte steht wie die 53. Bei der Addition von 8 Einern (s. Teilaufgabe e)) ergibt sich in der Stellentafel entweder eine mehrstellige Zahl an der Einerstelle (5Z 11E), oder die Zahl an der Zehnerstelle wird durch die Bündelung erhöht (6Z 1E). Das Unterrichtsmaterial für den Tausenderraum enthält an dieser Stelle einen zusätzlichen Aufgabenteil f), in welchem von der Zahl 753 ein Hunderter subtrahiert werden soll.

2 Zauberzahlen erkennen und darstellen

Als Zauberzahlen werden Zahldarstellungen bezeichnet, deren Stellen nicht vollständig gebündelt sind (s. o.). Wie bereits erläutert, kann eine Zahl beispielsweise in der Stellentafel auch mit mehrstelligen Zahlen an einer Stelle dargestellt oder mit dem Dienes Material beispielsweise mit mehr als 10 Einerwürfeln statt einer Zehnerstange gelegt werden. Der Wechsel zwischen unterschiedlichen Deutungen einer Zahldarstellung kann für die Schüler:innen herausfordernd sein. Er regt jedoch zu einem vertieften Verständnis des dezimalen Zahlaufbaus an (Scherer & Steinbring 2004).

Zielsetzung der Aktivitäten, mögliche Lösungsstrategien und Schwierigkeiten

In Aufgabe 2.1 werden verschiedene Darstellungsmöglichkeiten einer Zahl an einem Arbeitsmittel diskutiert. Dazu wird in Teilaufgabe a) festgestellt, dass es mehrere Möglichkeiten gibt, die Zahl 62 in der Stellentafel darzustellen. Unter Verwendung des Dienes Materials sollen die Schüler:innen erklären, dass die Darstellung von 5 Zehnern und 12 Einern der Zahl 62 entspricht. Eine mögliche Lösung stellt hier das Bündeln der 12 Einer zu 1 Zehner und 2 Einern dar. Anschließend werden die Darstellungen 5Z 12E und 6Z 2E miteinander verglichen. Die Schüler:innen sollen erkennen, dass sie bei der ersten Möglichkeit die Einer - wie oben beschrieben - bündeln müssen, während sie die Zahl bei der zweiten Möglichkeit direkt ablesen können. Teilaufgabe b) fokussiert das Bündeln und Entbündeln mit dem Dienes Material, indem die Schüler:innen die Aussage „Zwei Zehner und zwanzig Einer – das sind gleich viele!“ mit dem Dienes Material erklären sollen (Selter et al. 2014c). In Aufgabenteil c) wird weiterhin das Bündelungsprinzip fokussiert. Die Schüler:innen werden dazu aufgefordert, durch Bündeln andere Darstellungen mit demselben Arbeitsmittel zu finden, sodass sie die Zahlen schnell erkennen können. Es wird dabei mit dem Dienes Material und dem Rechengeld gearbeitet.

Aufgabe 2.2 wird in Partnerarbeit bearbeitet. Dazu denken sich die Schüler:innen in Aufgabenteil a) jeweils eine 2-stellige Zahl aus und stellen diese mit dem Dienes Material dar. Der:die Partner:in soll die dargestellte Zahl symbolisch notieren und eine weitere Darstellungsmöglichkeit mit dem Dienes Material finden. Wird die Zahl im ersten Schritt vollständig gebündelt dargestellt, so ist für eine zweite Darstellung das Entbündeln gefordert. Ebenso kann jedoch auch die erste Person eine nicht vollständig gebündelte Darstellung notieren. Dann führt das Bündeln oder ggf. weiteres Entbündeln zu einer anderen Darstellung. In Aufgabenteil b) wird anschließend analog mit dem Rechengeld gearbeitet. Da

dieses Arbeitsmittel vielfältiger strukturiert ist (z. B. 5-Euro-Schein, 2-Euro-Münze), können für eine Zahl möglicherweise viele verschiedene Darstellungsmöglichkeiten gefunden werden.

3 Zahlen mit der gleichen Anzahl an Teilen darstellen

In Aufgabenblock 3 setzen sich die Schüler:innen vertiefend mit dem Dienes Material und dem Rechengeld auseinander. Unter Vorgabe einer bestimmten Anzahl an Teilen sollen sie Zahlen darstellen und erklären, wie man alle Zahlen finden kann sowie die größten und kleinsten Zahlen notieren.

Zielsetzung der Aktivitäten, Lösungsstrategien und Umgang mit möglichen Schwierigkeiten

In Teilaufgabe a) werden Zahlen gesucht, die mit genau fünf Teilen des Dienes Materials dargestellt werden können. Die Lösungen können die Schüler:innen durch systematisches Probieren finden (vgl. auch die Darstellungen in Abb. 7). Außerdem sollen die Schüler:innen die größte und kleinste mögliche Zahl angeben. Anschließend wird nach den Gemeinsamkeiten der gefundenen Zahlen gefragt. Die Schüler:innen können hier entdecken, dass alle Zahlen die Quersumme 5 haben (vgl. Abb. 7). In Teilaufgabe b) sollen die Schüler:innen erklären, warum sich die Zahl 21 nicht mit 5 Teilen des Dienes Materials darstellen lässt. Hier ist ebenfalls eine Argumentation über die Quersumme möglich. Die Schüler:innen können jedoch auch unter zu Hilfenahme des Dienes Materials begründen, dass die Zahl 21 mit fünf Teilen nicht darstellbar ist. In den folgenden Teilaufgaben c) und d) sollen die Schüler:innen die zwei größten und kleinsten Zahlen mit genau 7 Teilen des Dienes Materials darstellen und ihre Ergebnisse begründen. Die Teilaufgabe e) fordert die Schüler:innen dazu auf, mit genau drei Teilen des Rechengelds alle möglichen Zahlen zu finden und diese darzustellen. Die Auswahl ist dabei auf 10-Euro-Scheine und 1-Euro-Münzen beschränkt, um das Verständnis des dezimalen Stellenwertsystems zu fokussieren. Eine Lösung kann dabei – analog wie beim Dienes Material (s. o.) – durch systematisches Probieren oder durch das Bilden der Quersumme gefunden werden.

Systematisches Probieren:	Quersumme: 5
Z Z Z Z Z: 50	50, 41, 32, 23, 14, 5
Z Z Z Z E: 41	
Z Z Z E E: 32	
Z Z E E E: 23	
Z E E E E: 14	
E E E E E: 5	

Abb. 7: Lösung durch systematisches Probieren oder das Bilden der Quersumme

4 Zahlen-Steckbriefe

Im letzten Aufgabenblock geht es um den Vergleich von Zahlen in verschiedenen Darstellungen. Dadurch werden alle Arbeitsmittel dieses Unterrichtsmaterials in Beziehung zueinander gesetzt.

Zielsetzung der Aktivitäten, Lösungsstrategien und Umgang mit möglichen Schwierigkeiten

Für diese Aufgabe arbeiten die Schüler:innen zunächst in Gruppen zusammen, jedoch werden die Erkenntnisse anschließend in der gesamten Klasse zusammengeführt. Im Unterrichtsmaterial für den Hunderterraum gibt es folgende Gruppen:

Gruppe 1	Gruppe 2	Gruppe 3	Gruppe 4	Gruppe 5	Gruppe 6	Gruppe 7	Gruppe 8
22	73	5	16	36	23	3	15
42	75	50	45	46	25	30	67
82	77	55	54	66	27	33	51
92	79		61	96	28		76

Abb. 8: Gruppenanordnung für das Ausfüllen der Steckbriefe im Hunderterraum

Für die Gruppen 1 und 5 wurden Zahlen ausgewählt, deren Zehnerstellen sich unterscheiden, während die Einerstellen innerhalb der Gruppe gleich sind. Die Zahlen der Gruppen 2 und 6 unterscheiden sich an den Einerstellen, aber die Zehnerstellen bleiben innerhalb der Gruppe gleich. Die Schüler:innen in Gruppe 3 und Gruppe 7 arbeiten mit Zahlen, bei deren Vergleich das Positionsprinzip wichtig ist, da dieselbe Ziffer in den Zahlen an unterschiedlichen Stellen steht. In den Gruppen 4 und 8 werden *Umkehrzahlen* (PIKAS 2009) genutzt, die eine klassische Schwierigkeit bei der deutschen Zahlwortbildung aufgreifen, nämlich das Vertauschen der Ziffern durch die invertierte Sprechweise.

Im Unterrichtsmaterial für den Tausenderraum sind die folgenden Gruppen enthalten:

Gruppe A	Gruppe B	Gruppe C	Gruppe D	Gruppe E	Gruppe F	Gruppe G	Gruppe H
	732	500	616	363	236	300	515
227 427	752	505	545	463	256	303	767
827 927	772	550	554	663	276	330	551
	792		661	963	286		776

Abb. 9: Gruppenanordnung für das Ausfüllen der Steckbriefe im Tausenderraum

Für die Gruppen A und E wurden Zahlen ausgewählt, deren Hunderterstellen sich unterscheiden, während die Zehner- und Einerstellen innerhalb der jeweiligen Gruppen gleich sind. Die Zahlen der Gruppen B und F unterscheiden sich an den Zehnerstellen, aber die Hunderter- und Einerstellen bleiben innerhalb der Gruppe gleich. Die Einerstellen werden hier nicht variiert, da die Zahlen nur ungefähr am Tausenderstrahl eingetragen werden können. Gruppe C und Gruppe G arbeiten mit Zahlen, bei deren Vergleich das Positionsprinzip wichtig ist, da dieselbe Ziffer in den Zahlen an unterschiedlichen Stellen steht. Die Gruppen D und H arbeiten mit Umkehrzahlen deren Zehner und Einer variieren.

Für die Arbeit in der Klasse sind drei Varianten denkbar:

- Alle Schüler:innen arbeiten mit dem Unterrichtsmaterial für den Hunderterraum.
- Alle Schüler:innen arbeiten mit dem Unterrichtsmaterial für den Tausenderraum.
- Einige Schüler:innen arbeiten mit dem Unterrichtsmaterial für den Hunderterraum, andere mit dem Unterrichtsmaterial für den Tausenderraum.

Durch diese drei Varianten ergeben sich unterschiedliche Szenarien für die Arbeit in diesem Aufgabenblock. Arbeiten alle Schüler:innen mit demselben Unterrichtsmaterial, so werden je nach Möglichkeit bis zu acht Gruppen (vgl. Abb. 8 bzw. 9) mit drei bis vier Schüler:innen gebildet. Wenn einige Schüler:innen im Hunderterraum und andere im Tausenderraum arbeiten, werden nach Möglichkeit die Gruppen 1 bis 4 und Gruppen A bis D gebildet. Die Zahlen in den Gruppen 1 und A, den Gruppen 2 und B, usw. wurden „strukturgleich“ gewählt, sodass bei Beachtung der Strukturanalogie der Gruppen ein paralleles Arbeiten und ein anschließender Austausch möglich ist. Die grau hinterlegten Gruppen sollten bei jeder Konstellation vergeben werden.

Nach der Gruppenbildung werden die Zahlen in der Gruppe verteilt. Anschließend füllen die Schüler:innen den Steckbrief (vgl. Kopiervorlage für Hunderter- und Tausenderraum) in Einzelarbeit aus, indem sie die verschiedenen Darstellungen für ihre Zahl angeben. Dabei kann die Ausfüllhilfe, die sich am Anfang des Unterrichtsmaterials befindet, als Unterstützung hinzugezogen werden. Für Teilaufgabe b) notieren die Schüler:innen alle Zahlen ihrer Gruppe und bestimmen die kleinste und größte Zahl. Dann vergleichen sie die Zahlen innerhalb ihrer Gruppe entlang der verschiedenen Darstellungen und halten schriftlich fest, was ihnen auffällt. Anschließend sollen die Gruppen im Plenum berichten, welche Gemeinsamkeiten sie in den Darstellungen erkannt haben (z. B. Gruppe 1 für das Dienes Material: Die Zahlen werden mit unterschiedlich vielen Zehnerstangen dargestellt, aber immer mit zwei einzelnen Würfeln). Wenn den Schüler:innen bei der Bearbeitung der Vergleich der Zahlen in den Steckbriefen schwerfällt, kann es hilfreich sein, diesen zu zerschneiden und ein Plakat zu erstellen. Für jedes Arbeitsmittel werden die zugehörigen Darstellungen der Zahlen auf ein Plakat geklebt und darunter die vergleichende Beobachtung festgehalten. Das Plakat kann anschließend der gesamten Klasse präsentiert werden. Teilaufgabe c) wird gruppenübergreifend mit der gesamten Lerngruppe bearbeitet. Zunächst sortieren die Schüler:innen die Zahlen aller Gruppen der Größe nach. Hier kann es sinnvoll sein, die Zahlen auf die Rückseite der Steckbriefe (oder ggf. auf weitere Zettel, wenn z. B. Steckbriefe zerschnitten wurden) schreiben zu lassen, sodass sich die Schüler:innen mit ihren Zahlen der Größe nach in einer Reihe aufstellen können. Anschließend werden verschiedene Fragen zu den Zahlen gestellt, die zentrale Aspekte des Stellenwertsystems aufgreifen. Diese sind für beide Unterrichtsmaterialien strukturgleich formuliert. Für das Arbeiten in beiden Zahlenräumen sollten daher die Fragen aus beiden Unterrichtsmaterialien zusammengefügt werden. Im Folgenden werden die einzelnen Fragen genauer betrachtet. Zunächst wird nach der kleinsten und größten Zahl gefragt. Daraufhin werden alle Zahlen, die die Ziffer 2 enthalten, angesprochen und betrachtet, an welcher Stelle sich die Ziffer 2 befindet. Hierbei sollte auf den Wert der Ziffer in Abhängigkeit von ihrer Position eingegangen werden. Analog wird für Ziffer 6 vorgegangen. Das Positionsprinzip wird hier stark fokussiert. Durch die darauffolgenden Fragen, die sich auf den ordinalen Zahlenaspekt beziehen, werden die Zahlen hinsichtlich ihrer Anordnung bzw. der Anordnung im jeweiligen Zahlenraum betrachtet. Die beiden letzten Fragen beziehen sich auf Aufgabenblock 3, in dem die Schüler:innen mit einer bestimmten Anzahl an Teilen Zahlen mit Dienes Material und Rechengeld dargestellt haben. Die Frage zum Dienes Material lässt sich wieder mit Hilfe der Quersumme beantworten. Zahlen, die sich mit höchstens vier Geldscheinen darstellen lassen, können durch Probieren und die Erkenntnis, dass nur Zahlen mit Teiler 5 in Frage kommen, gefunden werden. An dieser Stelle wird für Zahlen bis 1 000 auch der 500-Euro-Schein berücksichtigt, auch wenn dieser nicht mehr gedruckt wird.

Die Fragen sind für beide Unterrichtsmaterialien strukturgleich formuliert, wobei für Zahlen bis 1 000 zusätzlich nach Ziffern an der Hunderterstelle gefragt wird und sich die Intervalle in den Fragen unterscheiden. Es wurden dazu exemplarisch die oben beschriebenen Verteilungen der Gruppen angenommen. Dementsprechend können bei nicht vollständiger Verteilung der Gruppen auch weniger oder andere Zahlen eine Lösung sein.

	Gruppen 1-8	Gruppen A-H	Gruppen 1-4 und A-D
Welche Zahl ist die kleinste?	3	227	5
Welche Zahl ist die größte?	96	963	927
Welche Zahlen enthalten die Ziffer 2?	22, 23, 25, 27, 28, 42, 82, 92	227, 236, 256, 276, 286, 427, 732, 752, 772, 792, 827, 927	22, 42, 82, 92, 227, 427, 732, 752, 772, 792, 827, 927
Welche Zahlen haben eine 2 an der Einerstelle?	22, 42, 82, 92	732, 752, 772, 792	22, 42, 82, 92, 732, 752, 772, 792
Welche Zahlen haben eine 2 an der Zehnerstelle?	22, 23, 25, 27, 28	227, 427, 827, 927	22, 227, 427, 827, 927
Welche Zahlen haben eine 2 an der Hunderterstelle?	--	227, 236, 256, 276, 286	227
Welche Zahlen enthalten die Ziffer 6?	16, 36, 46, 61, 66, 67, 76, 96	236, 256, 276, 286, 363, 463, 616, 661, 663, 767, 776, 963	16, 61, 616, 661
Welche Zahlen haben eine 6 an der Einerstelle?	16, 36, 46, 66, 76, 96	236, 256, 276, 286, 616, 776	16, 616
Welche Zahlen haben eine 6 an der Zehnerstelle?	61, 66, 67	363, 463, 661, 663, 767, 963	61, 661
Welche Zahlen haben eine 6 an der Hunderterstelle?	--	616, 661, 663	616, 661
Welche Zahlen haben die 70 (700) als kleineren Nachbarzehner (Nachbarhunderter)?	73, 75, 76, 77, 79	732, 752, 767, 772, 776, 792	73, 75, 77, 79, 732, 752, 772, 792
Welche Zahlen sind der Vorgänger und der Nachfolger von 78? (662?)	77, 79	661, 663	77, 79, 661
Welche Zahlen liegen zwischen 50 und 70? (550 und 570?)	51, 54, 55, 61, 66, 67	551, 554	54, 55, 554
Welche Zahlen liegen zwischen 83 und 91? (830 und 910)	unlösbar	unlösbar	unlösbar
Welche Zahlen könnt ihr mit genau sechs Teilen von dem Dienes Material darstellen?	15, 33, 42, 51	303, 330	42
Welche Zahlen könnt ihr mit höchstens vier Geldscheinen darstellen?	5, 15, 25, 30, 45, 50, 55, 75	300, 330, 500, 505, 515, 545, 550	5, 45, 50, 55, 75, 500, 505, 545, 550

Abschließend sollen sich die Schüler:innen zwei weitere Fragen ausdenken und diese beantworten.

Möglicherweise ist es für die Schüler:innen schwierig, die Zahlen zu den Fragen unmittelbar zu notieren, wenn sie gemeinsam in einer Reihe stehen. Denkbar wäre, dass eine Person zunächst

protokolliert und die Lösungen anschließend über eine Dokumentenkamera o. Ä. allen zur Verfügung stellt (auch das Notieren an der Tafel ist denkbar).

Variationen der Aufgaben

An vielen Stellen im Material sind Reflexionsaufträge formuliert, beispielsweise in der Form, dass die eigene Vorgehensweise beschrieben oder Auffälligkeiten in den Darstellungen insbesondere mit Blick auf ihre Vernetzung erklärt werden sollen. Diese Aufträge sind zwar für nachhaltiges Lernen von besonderer Bedeutung, aber gleichsam kognitiv und vor allem sprachlich anspruchsvoll. Statt die Schüler:innen die Antworten direkt schriftlich fixieren zu lassen, besteht die Möglichkeit, zunächst in kleineren Gruppen oder auch im Klassenkontext über Antworten zu diskutieren. Weiterhin kann bei den einzelnen Aufgaben überlegt werden, ob entsprechende Wortspeicher sinnvoll bzw. erforderlich sind (vgl. Selter et al. 2014c, d). Dies kann zum Beispiel zentrale Begriffe wie Einer(stelle), Zehner(stelle), Hunderter(stelle), usw. aber auch die Bezeichnungen der Darstellungs- und Arbeitsmittel betreffen.

Literatur

- Bertram, J., Kaya, M. & Scherer, P. (2023). *Unterrichtsmaterial. Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1 000)*. Open Educational Resources. Online frei zugreifbar unter <https://maco.dzlm.de/node/54>
- Bruner, J. S. (1974). *Entwurf einer Unterrichtstheorie*. Berlin Verlag.
- da Costa Silva, N. & Rolka, K. (2023). *Didaktischer Kommentar zum Unterrichtsmaterial. Stellenwerte üben am Zahlenstrahl/-strich (Zahlen bis 10 000)*. Open Educational Resources. Online frei zugreifbar unter <https://maco.dzlm.de/node/54>
- Freeseemann, O. (2014). *Schwache Rechnerinnen und Rechner fördern. Eine Interventionsstudie an Haupt-, Gesamt- und Förderschulen*. Springer Spektrum.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Aufl.). Springer Spektrum.
- Padberg, F. & Benz, C. (2021). *Didaktik der Arithmetik: fundiert, vielseitig, praxisnah*. Springer Spektrum.
- PIKAS (2009). *Umkehrzahlen*. <https://pikas.dzlm.de/node/712>
- Prediger, S. & Wessel, L. (2011). Darstellen – Deuten – Darstellungen vernetzen: Ein fach- und sprachintegrierter Förderansatz für mehrsprachige Lernende im Mathematikunterricht. In S. Prediger & E. Özdil (Hrsg.), *Mathematiklernen unter Bedingungen der Mehrsprachigkeit – Stand und Perspektiven der Forschung und Entwicklung* (S. 163-184). Waxmann.
- Scherer, P. & Moser Opitz, E. (2010). *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Spektrum.
- Scherer, P. & Steinbring, H. (2004). Übergang von halbschriftlichen Rechenstrategien zu schriftlichen Algorithmen – Addition im Tausenderraum. In P. Scherer & D. Bönig (Hrsg.), *Mathematik für Kinder – Mathematik von Kindern* (S. 163-173). Grundschulverband.
- Schulz, A. & Wartha, S. (2021). *Zahlen und Operationen am Übergang Primar-/ Sekundarstufe. Grundvorstellungen aufbauen, festigen, vernetzen*. Springer Spektrum.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014a) (Hrsg.). *Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen*. https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/Dokumente/mskgs_n1a_1_hru_n1_a_130925.pdf
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014b) (Hrsg.). *Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen*. https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/Dokumente/mskgs_n1b_1_hru_n1_b_131009.pdf
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014c) (Hrsg.). *Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen*. https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/material_primar/N2/mskgs_n2a_komplett.pdf
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014d) (Hrsg.). *Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen. Natürliche Zahlen*. https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/material_primar/N2/mskgs_n2c_komplett.pdf

Aufgabe 2b) wurde erstellt in Anlehnung an:

Selter, C. Prediger, S. Nührenböcker, M. & Hußmann, S. (2014c). *Mathe sicher können: N1 A. Ich kann Zahlen mit Material lesen und darstellen*. https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/material_primar/N1/mskgs_n1a_komplett.pdf

Die Idee für das Quizformat in Aufgabe 4c) stammt aus:

Reiche, A.-K., Kortboyer, J., Ademmer, C. & Prediger, S. (o. D.). *Mathe sicher können. Die 5-Minuten-Mathe-Kartei. Handlungsorientierte Aktivitäten zur Sicherung mathematischer Verstehensgrundlagen in Klasse 5/6*. https://mathe-sicher-koennen.dzlm.de/mskfiles/uploads/Dokumente/msk-5minkartei_210225.pdf