

# Didaktischer Kommentar zum Unterrichtsmaterial

## Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1 000)

Jennifer Bertram, Merve Kaya & Petra Scherer

Mai 2023



Dieses Material wurde durch Jennifer Bertram, Merve Kaya und Petra Scherer konzipiert. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

### Zitierbar als

Bertram, J., Kaya, M. & Scherer, P. (2023). Didaktischer Kommentar zum Unterrichtsmaterial. Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen (Zahlen bis 1 000). Open Educational Resources. Online frei zugreifbar unter <https://maco.dzlm.de/node/54>.

### Projektherkunft

Dieses Material wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona erstellt und wird auch im Projekt QuaMath weiter genutzt (beide Projekte gemeinsam von den Ländern finanziert).

### Hinweis zu verwandtem Material

Weitere Materialien sind auf der gleichen Webseite wie das Material selbst zu finden.

# Stellenwerte üben mit Mustern und Strukturen

Mathematik wird häufig als „Wissenschaft von Mustern“ bezeichnet, und dies ist auch für den Mathematikunterricht zentral (vgl. Wittmann & Müller 2008): „Muster, Strukturen, funktionaler Zusammenhang“ wird in den Bildungsstandards als eigenständige Leitidee des Mathematikunterrichts formuliert (vgl. KMK 2022), während in verschiedenen Lehrplänen (z. B. MSB 2021) eine Integration in die verschiedenen Inhaltsbereiche erfolgt (Wittmann & Müller 2008, S. 42).

Eine Umsetzung dieser Idee erfolgt etwa durch strukturierte Übungen (z. B. Wittmann 1992), und in diesem Zusammenhang kommt auch dem „Operativen Prinzip“ (Wittmann 1985) zentrale Bedeutung zu, indem Schüler:innen beispielsweise Beziehungen zwischen Zahlen und Aufgaben untersuchen, Veränderungen beschreiben und selbst Muster und Strukturen konstruieren.

Für das Stellenwertverständnis sind die Kenntnis des jeweiligen Zahlenraums und ein flexibler Umgang mit den entsprechenden Zahlen und Zahlbeziehungen von zentraler Bedeutung. Durch operative Übungen und Thematisierung vielfältiger Zahlbeziehungen können entsprechende Kompetenzen aufgebaut werden. Zahlwortreihen und Zahlenfolgen können mit einem Fokus auf Stellenwertübergänge in vielfältiger Weise geübt werden, und dies kann mit und ohne anschauliche Unterstützungen erfolgen.

Auch wenn dezimale Strukturen bereits im Hunderterraum ausführlich thematisiert werden (vgl. z. B. Scherer 2003), sind bei der Erweiterung des Zahlenraums bis 1000 Schwierigkeiten zu erwarten, insbesondere wenn das Stellenwertverständnis noch nicht gesichert ist. Bewusst sind hier Aktivitäten auf den unterschiedlichen Repräsentationsebenen (enaktiv, ikonisch, symbolisch) gewählt und werden vernetzt, um das grundlegende Stellenwertverständnis zu sichern bzw. zu vertiefen. Hierbei kann selbst aus den Aufgaben ausgewählt und ein entsprechender Schwerpunkt gesetzt werden.

## Zielsetzungen der Aktivitäten

In den Aufgaben geht es um die Sicherung der Kenntnisse im Zahlenraum bis 1000. Dabei wird ein besonderer Fokus auf die Stellenwerte und Stellenwertübergänge gelegt. Umgesetzt wird dies durch flexibles Zählen oder Zahlenfolgen, die entweder mit anschaulicher Unterstützung der Zahlseiten des Tausenderbuchs oder in rein symbolischer Form zu bearbeiten sind. Letztere sind u. a. als entsprechende Additionen und Subtraktionen formuliert, wobei Einer, Zehner, Hunderter oder Vielfache der Stellenwerte zu addieren oder zu subtrahieren sind. Die Aufgaben zielen auf einen sicheren Aufbau der Zahlwortreihe (vgl. auch Spiegel 1997) sowie auf den flexiblen Umgang mit Zahlen und Zahlbeziehungen. Entsprechend dem „Operativen Prinzip“ (Wittmann 1985) ist es zentral, dass die Schüler:innen Beziehungen zwischen Zahlen untersuchen und Veränderungen beschreiben. Dies ermöglicht zu betrachten, wie sich beispielsweise einzelne Stellenwerte verändern, wenn ein gewisser Zählschritt, ein Weg auf einer Seite des Tausenderbuchs oder eine Operation ausgeführt wird (vgl. Wirkung einer Handlung bei Wittmann 1985) oder auch wie sich Zahlen verändern, wenn (systematische) Variationen an der Stellenwerttafel (oder kurz: Stellentafel) durchgeführt werden (vgl. Krauthausen 2018).

In Aufgabenblock 1 werden auf symbolischer Ebene Aktivitäten zum Zählen und zu Zahlenfolgen angeboten, die den Aufbau der Zahlreihe bis 1000 vertiefen. Dabei sollen insbesondere durch das Herstellen von vielfältigen Zahlbeziehungen Zählvorgänge ökonomisiert werden, indem zählende Strategien durch nicht-zählende abgelöst werden (Selter et al. 2014). Durch diverse sprachliche

Aktivitäten zum Beschreiben und Erklären der entdeckten Muster und Strukturen soll das Herstellen von Zahlbeziehungen weiter gefestigt werden.

Die Aktivitäten in Aufgabenblock 2 werden auf der Zahlseite des Tausenderbuchs ausgeführt. Dabei sind entweder vollständig ausgefüllte Seiten vorgegeben oder aber Seiten, die lediglich einige eingetragene Zahlen beinhalten, die als Orientierungspunkte dienen. Die Schüler:innen sollen dabei zunehmend die fehlenden Zahlen selbst konstruieren und dabei ihre Kenntnisse zum Stellenwertverständnis nutzen. Darüber hinaus kann auch das originale Arbeitsmittel „Tausenderbuch“ genutzt werden, wobei dann die Zahlenwerte auf den originalen Seiten zu nutzen und ggf. anzupassen sind.

Die Aktivitäten im dritten Aufgabenblock fokussieren auf das gezielte Verändern von Zahlen bzw. einzelner Stellenwerte (Hunderter, Zehner, Einer) mit dem Dienes Material und der Stellenwerttafel. Dadurch können Zahlbeziehungen genauer untersucht und Übungen auf verschiedenen Repräsentationsebenen durchgeführt werden.

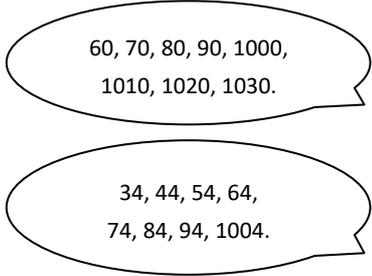
Insgesamt sollen die vielfältigen Übungen die Flexibilität im Umgang mit den Stellenwerten (auch Vielfachen) erhöhen und bei unterschiedlichen Ausgangszahlen umgesetzt werden. Die Schüler:innen sollen dabei auch die entstehenden und gesuchten Zahlen beschreiben und die jeweiligen Veränderungen hinsichtlich der Stellenwerte in den Blick nehmen. D. h. in allen Aktivitäten werden neben fachlichen Anforderungen auch sprachliche Anforderungen gestellt, die als eine übergeordnete Herausforderung mitbedacht werden müssen. Es sollte stets beachtet werden, dass das Beschreiben der Muster und Strukturen und das Erläutern der Vorgehensweisen sprachliche Anforderungen für sprachlich schwache Lernende darstellen, die ggf. durch Forschungsmittel (z. B. Farben oder Pfeile) oder andere Unterstützungsmaßnahmen auf Wort- und Satzebene gefördert werden müssen, damit allen Schüler:innen ein Zugang ermöglicht werden kann (Berg et al. 2019). Bei den einzelnen Aufgaben ist jeweils zu prüfen, ob entsprechende Wortspeicher sinnvoll bzw. erforderlich sind (vgl. Götze 2017). Dies kann die zentralen Begriffe wie etwa Einer, Zehner, Hunderter, Stellenwerttafel betreffen, aber auch die für eine Aufgabe spezifischen Begriffe wie etwa Startzahl oder Zielzahl.

## Lösungsstrategien und Umgang mit möglichen Schwierigkeiten

### Aufgabenblock 1: Flexibles Zählen & Zahlenfolgen

Beim flexiblen Zählen (Aufgabe 1.1) finden sich in den Teilen a) und b) Aktivitäten zum Vorwärts- und Rückwärtszählen in 2er-, 5er-, 10er- oder 100er-Schritten und in Aufgabenteil c) Aktivitäten, in denen 2- oder 3-stellige Zahlen bis zum nächsten Zehner, Hunderter oder Tausender ergänzt werden müssen. Bei Letzterem sind Schüler:innen gefordert, aufmerksam zu lesen und die verschiedenen Begrifflichkeiten zu Zehnern, Hundertern und Tausendern zu unterscheiden und konkret umzusetzen.

Die Aufgaben zum Vorwärts- und Rückwärtszählen sind in Partner- oder Gruppenarbeit so konzipiert, dass immer ein Kind zählt und die anderen Kinder den Zählvorgang kontrollieren, indem sie z. B. die dazugehörigen Zahlzeichen notieren. Anschließend soll gemeinsam darüber reflektiert werden. Alternativ kann die Aktivität auch im Klassenkontext mit allen Lernenden erfolgen. Eine typische Fehlerquelle in den



60, 70, 80, 90, 1000,  
1010, 1020, 1030.

34, 44, 54, 64,  
74, 84, 94, 1004.

Abb. 1: Zählvorgänge von Clara beim Vorwärtszählen in 10er-Schritten (beginnend bei 60 und beginnend bei 34)

Aufgabenteilen a) und b) sind Übergänge zum nächsten Zehner bzw. Hunderter oder Tausender (Selter & Spiegel 1997; Götze et al. 2019). Die Beispiele von Clara verdeutlichen dies (Abb. 1).

Clara zählt in 10er-Schritten bis zur 90 korrekt weiter und springt auf die 1000, von der sie in 10er-Schritten korrekt weiterzählt. Sie wiederholt den gleichen Fehler von der Startzahl 34 aus, indem sie von der 94 direkt auf die 1004 springt.

Im Vergleich zum Vorwärtszählen stellt das Rückwärtszählen für viele Schüler:innen eine kognitiv noch anspruchsvollere Tätigkeit dar. Wie die Beispiele von Anna in Abbildung 2 zeigen, sind typische Fehler neben dem Wechsel der Schrittlänge auch das Verändern der Zählrichtung. Anna zählt von der 540 bis zum vorherigen Hunderter korrekt in 10er-Schritten rückwärts und zählt anschließend in Einerschritten vorwärts weiter. Beim Rückwärtszählen in 100er-Schritten springt Anna von der 1000 auf die 9000 und zählt von 9000 aus in 1000er-Schritten rückwärts weiter.

Neben den aufgezeigten typischen Schwierigkeiten beim Vorwärts- und Rückwärtszählen sind Fehler in der nicht korrekten Notation der genannten Zahlwörter zu erwarten (vgl. auch Spiegel 1997), die in der Reflexion besprochen werden sollten. Dabei sollte zu den Aufgabenteilen a) und b) zusätzlich ein besonderes Augenmerk auf Auffälligkeiten in den Mustern und Strukturen der Zahlen gelegt werden (z. B. beim Zählen in 10er-Schritten bleibt die Einerstelle gleich). Auch sollte die Besonderheit der Aussprache von „Hundert“ und „Einhundert“ (bzw. „Tausend“ und „Eintausend“) thematisiert werden, da durch Unterschiede in der Aussprache häufig unterschiedliche Zahlen assoziiert werden.

Die Zahlenfolgen in Aufgabe 1.2 in Aufgabenteil a) und b) lassen sich mit einigen vorgegebenen Folgegliedern durch Schüler:innen vervollständigen und fördern das Erkennen von Mustern und Strukturen durch den flexiblen Umgang mit dem Aufbau der Zahlreihe. Dabei kann eine unterschiedliche Anzahl an Anfangs- oder Endgliedern vorgegeben werden oder aber lückenhafte Folgen. Bei Zahlenfolgen mit Lücken muss der Aufbau operativ durch systematisches Ausprobieren oder durch Ermittlung der Differenzen bestimmt werden (Selter et al. 2014). Gemeinsam mit Schüler:innen können bei dieser Aktivität Strategien beim Ergänzen der fehlenden Zahlen und dem Erkennen der Schrittgröße mit oder ohne Unterstützung von konkretem Anschauungsmaterial (z. B. Zahlenstrahl oder Hundertertafel bzw. Zahlseite des Tausenderbuchs) thematisiert werden (vgl. auch Aufgabenblock 2). Gleiches gilt für Schwierigkeiten bei Zehner-, Hunderter- oder Tausenderübergängen. In vielen Aufgabenteilen können Aktivitäten zum Erklären und Beschreiben sowohl mündlich als auch schriftlich bearbeitet werden. Im Aufgabenteil a) und b) bietet es sich an, nur ausgewählte und nicht alle Zahlenfolgen schriftlich beschreiben zu lassen.

In Aufgabenteil c) sind die Lernenden gefordert, eigene Zahlenfolgen zu erfinden. Die Eigenproduktionen können in der Länge variieren und ermöglichen eine gewisse Offenheit bzgl. der Wahl der Schrittfolge oder der Start- und Zielzahlen. Hier sind je nach Leistungsniveau der Schüler:innen sowohl einfache Zahlenfolgen in kleineren Zahlenräumen als auch Zahlenfolgen mit gemischten mehrstelligen Zahlen und Stellenwertübergängen zu erwarten (Abb. 3). Erfahrungsgemäß wählen Schüler:innen oftmals Abstände und Zahlenräume, in denen sie sich am sichersten fühlen. An dieser Stelle kann ein Impuls durch die Lehrkraft erfolgen, Zahlenfolgen auch mit anderen Zahlen und Abständen zu erfinden, etwa eine Startzahl größer als 500 zu wählen, eine gemischte Zahl (z. B. 635) als Startzahl zu wählen oder als Abstand eine glatte Zehnerzahl.

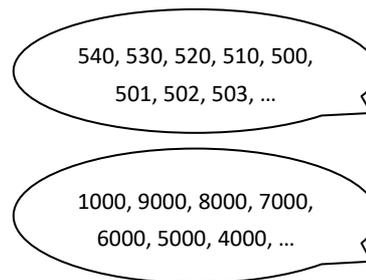


Abb. 2: Zählvorgänge beim Rückwärtszählen in 10er-Schritten (beginnend bei 540) und 100er-Schritten (beginnend bei 1000) von Anna

755	765	775	785	795	805	815
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

Abb. 3: Zahlenfolge zum Abstand 10 mit gemischten 3-stelligen Zahlen und Stellenwertübergang

Die Aktivitäten in Aufgabenteil d) und e) zum Finden von Zahlenfolgen zu vorgegebenen Beschreibungen des Musters haben problemorientierten Charakter, teils mit einer gewissen Offenheit. Während in Aufgabenteil d) nur eine einzige Lösung möglich ist, wird in Aufgabenteil e) das systematische Finden mehrerer Lösungen angestrebt. Hier bietet es sich an, verschiedene Ergebnisse gemeinsam im Plenum zu sammeln und miteinander zu vergleichen, denn auch beim zweiten Beispiel in Aufgabenteil e) entstehen zwangsläufig Zahlenfolgen mit Abstand 20. Mit dieser Auffälligkeit kann ein weiterer Gesprächsanlass geschaffen werden, der die Schüler:innen weiter dazu animiert, Beziehungen zwischen Zahlen(folgen) zu entdecken und zu beschreiben.

In Aufgabenteil f) sind die Schüler:innen aufgefordert, die Zahlenfolgen der passenden Beschreibung zuzuordnen (beides aus Kopiervorlage auszuschneiden). Die Zahlenfolgen und Beschreibungen setzen unterschiedliche Fokusse, die erkannt werden müssen, z. B. Abstände, Zehnerstelle oder Größe der Zahlen. Ggf. kann die Beschreibung „Der Abstand der Zahlen wird immer um 10 größer“ aufgegriffen und gemeinsam besprochen werden. Das Ordnen der Zahlenfolgen bzw. die Pärchenbildung in Aufgabenteil g) und h) sind als offene Aufgabenformate mit mehreren Lösungen gedacht. So kann z. B. nach Start- oder Zielzahl, der Schrittfolge oder nach auf- oder absteigenden Zahlen sortiert bzw. Pärchen gebildet werden. Nicht alle Zahlenfolgen müssen ausgehend vom selben Kriterium sortiert werden. Ebenso dürfen auch Zahlenfolgen übrigbleiben. Die Aktivität erlaubt den Schüler:innen viel Freiraum und begünstigt Einsichten in Muster und Strukturen durch das Vergleichen und in Beziehung Setzen verschiedener Zahlenfolgen zueinander. Für diese Aufgabe gibt es Kopiervorlagen, und die Schüler:innen müssen die entsprechenden Zahlenfolgen ausschneiden. Das Sortieren nach unterschiedlichen Kriterien kann entweder mit einem einfachen Satz an Zahlenfolgen erfolgen, oder aber die Vorlagen werden mehrfach kopiert, so dass die Schüler:innen die Zahlenfolgen mehrfach zur Verfügung haben und ihre verschiedenen Lösungen nebeneinanderlegen und vergleichen können.

Wie oben angemerkt, empfiehlt sich ein Wortspeicher zu zentralen Begrifflichkeiten der Zahlenfolgen wie „Startzahl“, „Zielzahl“ und „Abstand“, der ebenfalls beispielhafte Satzphrasen und Formulierungshilfen beinhaltet, die die Schüler:innen beim Beschreiben der Muster unterstützen. Forschermittel (z. B. Markieren mit Farben, Pfeilen oder Plättchen) eignen sich als nonverbale Darstellungsmittel im Besonderen zur Förderung von Beschreibungskompetenzen (Götze 2017) und sollten ebenfalls als zulässiges Hilfsmittel thematisiert und angeboten werden.

## Aufgabenblock 2: Zahlenwege

In diesem Aufgabenblock sind verschiedene Aufgaben auf den Zahlseiten des Tausenderbuchs zu bearbeiten. Dabei sind einerseits vollständig ausgefüllte Seiten gewählt (z. B. Aufgabe 2.1 a) bis c) oder 2.2) bzw. solche, die vollständig auszufüllen sind (Aufgabe 2.1 d)). Andererseits sind Seiten zu bearbeiten, die lediglich ausgewählte Zahlen als Orientierungspunkte enthalten (z. B. Aufgabe 2.3 oder 2.4). Hier sind die Schüler:innen gefordert, die nicht eingetragenen Zahlen mental zu rekonstruieren (vgl. auch Scherer 1995). Eine bestimmte Aufgabe kann aber auch in der jeweils alternativen Form (vollständig ausgefüllt oder nicht) gestellt werden. Insgesamt dienen diese Aufgaben der vertieften Orientierung im Zahlenraum bis 1000 unter Nutzung der visuellen Unterstützung der Seiten des Tausenderbuchs, mit dem Fokus Muster und Strukturen auszunutzen und die entsprechenden Zahlenmuster genauer zu untersuchen. Wie auch bei Aufgabenblock 1 ist zu überlegen, welche Wortspeicher (z. B. Start-/Zielzahl, diagonal o. Ä.) sinnvoll sind und welche Formulierungshilfen angeboten werden, insbesondere für das Beschreiben und Begründen von Auffälligkeiten und Zusammenhängen.

In Aufgabe 2.1 sind zunächst vorgegebene Muster fortzusetzen und die entstehenden Zahlen zu untersuchen (vgl. auch Scherer 2003, S. 89 f.). Das Fortsetzen kann einerseits allein durch das visuelle Muster erfolgen (weitere Plättchen in einer Zeile oder Spalte oder diagonal legen) oder schon unter Ausnutzung der Zahlkenntnisse mit einem fließenden Übergang zum mentalen Operieren. Bewusst sollen die Schüler:innen zunächst die numerische Veränderung in den Blick nehmen und danach die Unterschiede und Gemeinsamkeiten der entstehenden Zahlen beschreiben. Da zunächst die jeweilige Seite des Tausenderbuchs nicht verlassen werden darf, ändert sich häufig nur ein Stellenwert einer bestimmten Zahl. Die Schüler:innen sollen erkennen und verinnerlichen, dass ein Schritt nach rechts bzw. links eine Veränderung um  $+1$  bzw.  $-1$  bewirkt, was eine Veränderung an der Einerstelle und unveränderte Hunderter- und Zehnerstelle bedeutet. Ein Schritt nach unten bzw. oben hingegen bewirkt eine Veränderung um  $+10$  bzw.  $-10$  und entsprechend die Veränderung an der Zehnerstelle bei unveränderter Hunderter- und Einerstelle. Die diagonalen Schritte repräsentieren die Kombination aus 1er- und 10er-Schritten: diagonal nach rechts unten:  $+11$  ( $+1$  und  $+10$ ); diagonal nach rechts oben:  $-9$  ( $+1$  und  $-10$ ); diagonal links unten:  $+9$  ( $-1$  und  $+10$ ); diagonal nach links oben:  $-11$  ( $-1$  und  $-10$ ).

Bei selbstgewählten Zahlenwerten auf dieser Seite (Aufgabe 2.1 b)) könnte dann auch eine Zielzahl entstehen, bei der sich die Hunderterstelle ändert (500). Da bei diesen Aufgaben die Seite des Tausenderbuchs nicht verlassen werden darf, beinhalten die einzelnen Aufgaben eine unterschiedliche Anzahl an Schritten bis zur Zielzahl. Daneben kann es aber auch Schüler:innen geben, die ein Muster nicht bis zum Ende fortsetzen (etwa die erste Folge von 402 lediglich bis 462), was im Austausch aufgegriffen und vervollständigt werden kann.

In Aufgabe 2.1 c) sind nun Start- und Zielzahl vorgegeben, und ein möglicher Weg ist zu konstruieren. Dies kann mehr oder weniger eindeutig erfolgen (von 685 durch sieben Schritte nach oben auf 615; Veränderung jeweils um  $-10$ , d. h. insgesamt um  $70$ ). Bei anderen Zahlenwerten existieren mehrere Alternativen: So kann beispielsweise der Weg von 679 auf 624 durch fünf Schritte diagonal nach links oben erfolgen (Veränderung jeweils um  $-11$ , d. h. insgesamt um  $-55$ ; vgl. Abb. 4a).

601	602	603	604	605	606	607	608	609	610
611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	600

601	602	603	604	605	606	607	608	609	610
611	612	613	614	615	616	617	618	619	620
621	622	623	624	625	626	627	628	629	630
631	632	633	634	635	636	637	638	639	640
641	642	643	644	645	646	647	648	649	650
651	652	653	654	655	656	657	658	659	660
661	662	663	664	665	666	667	668	669	670
671	672	673	674	675	676	677	678	679	680
681	682	683	684	685	686	687	688	689	690
691	692	693	694	695	696	697	698	699	600

Abb. 4a und 4b: Mögliche Wege zu Aufgabe 2.1 b)

Der Weg könnte aber auch in horizontalen und vertikalen Schritten erfolgen (fünf Schritte nach oben, jeweils  $-10$ , und fünf Schritte nach links, jeweils  $-1$ , d. h. insgesamt  $-55$ ), die beliebig kombiniert werden können (z. B. erst alle Schritte nach oben, dann alle Schritte nach links oder abwechselnd ein Schritt nach oben, dann nach links usw.; vgl. Abb. 4b). Beim Vergleich verschiedener Wege sollten die Schüler:innen erkennen, dass die Veränderung insgesamt gleich bleibt. Sie könnten aber auch kreative „Umwege“ laufen, also beispielsweise mehr als fünf Schritte nach links gehen. Dies erfordert später dann wieder entsprechende Schritte nach rechts, und auch hier sollte die gleiche numerische Veränderung insgesamt erkannt werden.

In Aufgabe 2.1 d) und e) sind nun Muster zu vervollständigen, d. h. hier sollen auf lückenhaften Seiten entsprechende Zahlen rekonstruiert werden. Abbildung 5 zeigt zwei fehlerhafte Lösungen, in denen die Einerstellen jeweils korrekt eingetragen sind, die Zehner- bzw. Hunderterstelle aber noch Probleme bereitet (vgl. auch Scherer 1995, S. 156). Die fehlerhaften Lösungen sollten unter Betrachtung der Zahlbeziehungen und der eingetragenen Zahlen thematisiert werden (also beispielsweise bei der fehlerhaft eingetragenen Zahl 201 die Zahl direkt darüber und darunter betrachten). Die Schwierigkeiten können ggf. auch sprachlich bedingt sein, und die Schüler:innen sollten ihre eingetragenen Zahlen auch verbalisieren (Zahlen in derselben Spalte ändern sich um 10).

201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
211	212	213	214	215	216	217	218	219	220
221	222	223	224	225	226	227	228	229	230
231	232	233	234	235	236	237	238	239	240
241	242	243	244	245	246	247	248	249	250
201	202	203	204	205	206	207	208	209	210
261	262	263	264	265	266	267	268	269	270
271	272	273	274	275	276	277	278	279	280
281	282	283	284	285	286	287	288	289	290
291	292	293	294	295	296	297	298	299	300

401	402	403	404	405	406	407	408	409	410
411	412	413	414	415	416	417	418	419	420
421	422	423	424	425	426	427	428	429	430
431	432	433	434	435	436	437	438	439	440
441	442	443	444	445	446	447	448	449	450
501	502	453	454	455	456	457	458	459	460
461	462	463	464	465	466	467	468	469	470
471	472	473	474	475	476	477	478	479	480
481	482	483	484	485	486	487	488	489	490
491	492	493	494	495	496	497	498	499	500

Abb. 5: Fehlerhaftes Vervollständigen der Zahlseiten zu Aufgabe 2.1 d)

Sind jeweils nur die grau markierten Felder auszufüllen (Aufgabe 2.1 e)), kann es dennoch geschehen, dass Schüler:innen auch weitere freie Felder ausfüllen (vgl. Abb. 6, aus Scherer 1995, S. 156). Grund könnte sein, dass der Arbeitsauftrag nicht vollständig klar war, aber es könnte auch sein, dass Schüler:innen für sich zunächst weitere Orientierungspunkte benötigen, um dann anschließend die geforderten Vorgänger und Nachfolger in den grauen Feldern eintragen zu können.

801	802	803	804	805	806	807	808	809	810
811	812	813	814	815	816	817	818	819	820
				825			828		
				835	836	837	838		
				845	846				
				855					
			864	865					
		873		875					
881	882	883		885					
891				895			899	900	

Abb. 6: Ausfüllen von weiteren freien Feldern bei Aufgabe 2.1 e)

In Aufgabe 2.2 ist jeweils eine Schrittfolge angegeben, die umgesetzt werden soll. Auch hier sind wieder die Zielzahl zu bestimmen und die numerischen Veränderungen anzugeben. Im Anschluss ist die Rechnung zur Schrittfolge zu notieren, um dann nach einem kürzeren Weg zu suchen. Dies kann entweder am Weg auf der Seite entdeckt werden oder aber anhand der Rechnung. So kann bei der Rechnung  $655 + 1 + 1 + 1 - 10 - 10 - 10 - 10 - 1 - 1 + 10$  erkannt werden, dass ein Schritt nach rechts durch einen Schritt nach links aufgehoben wird und analog ein Schritt nach oben durch einen Schritt nach unten. Bei der anschließenden Aufgabe 2.3 sind Start- und Zielzahl gegeben (hier auf verschiedenen Seiten des Tausenderbuchs), und die Schrittfolge ist gesucht (Kopiervorlage hierzu nutzen). Auch hier sind kürzeste Wege und entsprechende Rechnungen gesucht.

Aufgabe 2.4 hat einen eher problemorientierten Charakter: So sollen ausgehend von der Startzahl 777 fünf Schritte gegangen werden. Gesucht sind zunächst verschiedene Wege, die die Schüler:innen frei wählen können. Anschließend wird aber gezielt nach der kleinsten bzw. größten Zielzahl gefragt oder auch eine glatte Zehnerzahl gesucht.

Für die kleinste Zielzahl könnte der Schritt mit der größten Verminderung gewählt werden, d. h. diagonal nach links oben (Veränderung um  $-11$ ). Diese fünf Schritte können auf der Seite auch realisiert werden, so dass sich als Zielzahl 722 ergibt. Analog könnte für die größte Zielzahl der Schritt mit der größten Vergrößerung gewählt werden, d. h. diagonal nach rechts unten (Veränderung um  $+11$ ). Dies würde aber bereits nach zwei Schritten auf den Rand der Seite führen, und es wäre nur noch ein Schritt nach rechts möglich (Zielzahl 800). Mit drei Schritten wäre man also schon auf der größten Zahl auf dieser Seite. Ersetzt man die beiden diagonalen Schritte jeweils durch einen Schritt nach rechts und einen Schritt nach unten, dann erfüllt man die Vorgabe „fünf Schritte“ und erreicht die größte Zielzahl 800. Diese Zielzahl erfüllt gleichzeitig auch das Kriterium einer gesuchten Zehnerzahl. Es sind aber ausgehend von 777 noch weitere Zehnerzahlen zu erreichen, beispielsweise 760 (zwei Schritte nach oben, drei Schritte nach rechts) oder 730 (drei Schritte diagonal nach rechts oben, zwei Schritte nach oben) oder weitere durch das Einbauen von Umwegen.

Ähnliche Überlegungen gilt es bei der Aufgabe 2.4 b) anzustellen, bei der die Zielzahl gegeben ist und die Startzahl bei drei Schritten gesucht ist. Hier sind alle Wege auf der Seite zu realisieren, und mit drei Schritten wird der Rand nicht erreicht.

### Aufgabenblock 3: Operatives Verändern von Zahlen

In Aufgabe 3.1 werden Stellenwerte gezielt verändert, und es steht die Frage im Vordergrund, wie sich eine Zahl verändert, wenn Operationen bezüglich einzelner Stellenwerte (Hunderter, Zehner oder Einer) in Form einer Addition oder Subtraktion ausgeführt werden. Neben der Beobachtung, dass beispielsweise die Hunderter- und Zehnerstelle gleich bleiben, wenn zu 374 immer 1 addiert wird (bis zum nächsten Zehnerübergang), können die Schüler:innen auch entdecken, inwiefern eine Ziffer in einer Zahl einen unterschiedlichen Wert hat, je nachdem an welcher Position sie steht (zu 444 wird jeweils immer ein Einer, ein Zehner oder ein Hunderter addiert, bis beispielsweise die Zahlen 447, 474 und 744 entstehen; vgl. Stellenwertprinzip z. B. in Fromme 2017, S. 51 f. oder in Krauthausen 2018, S. 55). Für die Teilaufgaben c) und d) können optional die Kopiervorlagen genutzt werden, die u. U. auch als Strukturierungshilfe dienen.

Durch das Verändern von Zahlen mit dem Dienes Material (Aufgabe 3.2) erhalten die Schüler:innen die Möglichkeit, das operative Verändern von Zahlen auch enaktiv zu erfahren. Mit gegebener Start- und Zielzahl, die sich nur in einer Ziffer unterscheiden, kann zunächst bestimmt werden, welche Zahl addiert bzw. subtrahiert wurde, indem betrachtet wird, welches Material hinzugefügt oder entfernt werden muss. Z. B. entsteht die Zahl 23 aus der Zahl 13, indem eine Zehnerstange hinzugefügt wird (+10) oder die Zahl 162 entsteht aus der Zahl 172, indem eine Zehnerstange entfernt wird (−10). Darüber hinaus sind die Aufgaben so aufgebaut, dass ein Muster erkannt werden kann. Bei Aufgabenteil a) muss beispielsweise immer ein Zehner pro Frage mehr hinzugefügt werden (erst +10, dann +20, dann +30) und bei Aufgabenteil b) immer ein Hunderter mehr (erst +100, dann +200, dann +300). Bei Aufgabenteil d) entstehen die Zielzahlen, indem zu der Startzahl 11, 101 oder 110 addiert wird, sodass stets zwei Stellenwerte verändert werden und ein Stellenwert gleich bleibt. In Aufgabenteil f) wird explizit die Vernetzung verschiedener Repräsentationsebenen angeregt (Dienes Material und symbolische Schreibweise).

Durch das Verändern von Zahlen in der Stellenwerttafel (Aufgabe 3.3; vgl. hierzu auch Kopiervorlage) kann vor allem die Bedeutung der Plättchen und damit der Ziffern an verschiedenen Stellen in einer Zahl betrachtet werden (siehe auch Nührenböcker et al. 2017, S. 39). Wenn eine Zahl gegeben ist und wie in Aufgabenteil a) ein Plättchen hinzugefügt wird, können drei neue Zahlen entstehen. Zum Beispiel wird aus 324 die Zahl 424 durch das Hinzufügen eines Plättchens in der Hunderterspalte, die Zahl 334 durch das Hinzufügen eines Plättchens in der Zehnerspalte und die Zahl 325 durch das Hinzufügen eines Plättchens in der Einerspalte. Insbesondere kann an dieser Stelle auch thematisiert werden, dass bei der Zahl 192 durch das Hinzufügen eines Plättchens in der Zehnerspalte für eine konventionelle Darstellung zehn Plättchen der Zehnerspalte durch ein Plättchen in der Hunderterspalte ersetzt werden (sodass die Zahl 202 in konventioneller Schreibweise entsteht). Analog erfolgt in Aufgabenteil b) das Entfernen eines Plättchens. Hier kann insbesondere thematisiert werden, dass aufgrund des Operierens in enaktiver Form, z. B. bei der Zahl 803, kein Plättchen an der Zehnerstelle vorhanden ist, welches entfernt werden könnte. Soll auf symbolischer Ebene die Zahl 803 um 10 verkleinert werden, so kann die dazu passende Handlung verdeutlicht werden: zunächst wird ein Hunderter entbündelt, sodass ein Plättchen der Hunderterspalte durch 10 Plättchen in der Zehnerspalte ersetzt wird (vgl. Bündelungsprinzip z. B. in Fromme 2017, S. 51 f. oder in Krauthausen 2018, S. 54). Erst dann kann die wirkliche Handlung, das Wegnehmen eines Plättchens in der Zehnerspalte erfolgen, sodass die Zahl 793 entsteht. In Aufgabenteil c) wird ein Plättchen verschoben, und es sollen größte und kleinste Zahlen entstehen. Hierbei wird die größte Zahl gebildet, indem ein Plättchen von der Einer- in die Hunderterspalte verschoben wird. Die kleinstmögliche Zahl entsteht durch das Verschieben eines Plättchens von der Hunderterspalte in die

Einerspalte. Im letzten Aufgabenteil d) dürfen drei Plättchen beliebig in die Stellenwerttafel gelegt werden. Als kleinstmögliche Zahl kann die Zahl 3 und als größtmögliche Zahl die 300 gebildet werden. Ein systematisches Vorgehen kann helfen, alle zehn Möglichkeiten für die Verteilung der drei Plättchen auf drei Spalten zu finden (Abb. 7; für weitere Ideen zu kombinatorischen Entdeckungen an der Stellenwerttafel vgl. Bock & Siegemund-Johannsen 2020). Beispielsweise werden zunächst alle Plättchen in je eine Spalte (für die Zahlen 300, 30 und 3) oder jedes Plättchen einzeln in eine Spalte (für die Zahl 111) gelegt. Werden schließlich zwei Plättchen in je eine Spalte gelegt, so kann das übrige Plättchen in die jeweils anderen beiden Spalten gelegt werden (für die Zahlen 210 und 201, 21 und 120 sowie 12 und 102).

H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
•••			••	•		••		•
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
	•••			••	•	•	••	
H	Z	E	H	Z	E	H	Z	E
		•••		•	••	•		••
H	Z	E						
•	•	•						

Abb. 7: Lösungen zu Aufgabe 3.3 d)

Beim Einsatz des Dienes Materials sowie beim Verschieben einzelner Plättchen in der Stellenwerttafel sollte insbesondere darauf geachtet werden, möglichen Schwierigkeiten beim Bündeln und Entbündeln zu begegnen. Weiterhin können Schwierigkeiten auftreten, wenn unbesetzte Stellenwerte (z. B. bei Aufgabe 3.3 b) vorkommen.

## Variationen der Aufgaben

In allen Aufgabenblöcken kann der Schwierigkeitsgrad durch Variation des Zahlenraumes bzw. der Zahlenwerte erfolgen (vgl. auch Scherer 2003). Insbesondere für die Aufgaben in Aufgabenblock 3 kann der Zehntausenderraum genutzt werden, um das Stellenwertverständnis auch bei größeren Zahlen zu sichern. Beispielsweise können durch Hinzunahme der Tausenderwürfel des Dienes Materials oder durch Ergänzen einer Tausenderspalte in der Stellenwerttafel die Aufgaben 3.2 und 3.3 auf einen größeren Zahlenraum erweitert werden.

Auch die Komplexität der zu findenden Lösungen kann variiert werden. Bei Aufgabe 3.3 c) könnte etwa zunächst untersucht werden, wie viele Möglichkeiten es gibt, ein oder zwei Plättchen in der Stellenwerttafel zu platzieren. Nachdem verschiedene Möglichkeiten mit drei Plättchen untersucht wurden, ist auch eine Erweiterung mit vier, fünf, ... Plättchen möglich.

Während einige Aufgaben explizit die Verknüpfung mehrerer Repräsentationsebenen berücksichtigen, können weitere mentale Prozesse angeregt werden. Die Handlungen in den Aufgaben zum Dienes Material (Aufgabenblock 3) könnten beispielsweise nur in der Vorstellung

ausgeführt, oder bei den Aufgaben in Block 2 könnten die Zahlseiten des Tausenderbuchs mit mehr oder weniger eingetragenen Zahlen verwendet werden (vgl. auch Scherer 1995).

Auch die Komplexität von Aktivitäten in Aufgabenblock 1 kann dadurch variiert werden, dass Zahlenfolgen mental bzw. rein mündlich bearbeitet werden. Das gleiche gilt für Aufgaben, die das Erklären und Beschreiben von Vorgehensweisen und Zahlbeziehungen einfordern. Das Verschriftlichen von Beschreibungen und Erklärungen zu mathematischen Zusammenhängen ist für Schüler:innen – unabhängig von sprachlichen Ausgangsvoraussetzungen – oftmals komplexer als das Verbalisieren.

Die Verknüpfung verschiedener Darstellungs- und Repräsentationsebenen kann u. a. auch in Partnerarbeit realisiert werden. So kann bspw. bei Aufgabe 1.2 c) die (symbolische) Zahlenfolge eines Kindes von einem anderen Kind verbal beschrieben werden. Weiterhin könnten sich zwei Kinder (oder die gesamte Klasse) auch im Sinne einer fachintegrierten Sprachförderung über die verschiedenen Beschreibungen eines Musters austauschen.

Die Aufgabenblöcke 1 bis 3 können beliebig miteinander kombiniert oder auch unabhängig voneinander bearbeitet werden. Die Kombination legt vor allem nahe, dass Muster und Strukturen mit verschiedenen Arbeitsmitteln (z. B. Plättchen, Tausenderbuch, Dienes Material) und variierenden Aufgabenstellungen (z. B. eher offene oder eher problemorientierte Aufgaben) erkundet und beschrieben werden, um dadurch ein sicheres Stellenwertverständnis aufzubauen.

Bei verschiedenen Aufgaben können die möglichen Schwierigkeiten auch durch Dokumente realer oder auch konstruierter Fehllösungen aufgegriffen werden: Ein Schülerdokument wie in Abb. 5 zu Aufgabe 2.1 d) kann den Schüler:innen beispielsweise als explizite „Fehlersuchaufgabe“ präsentiert werden, und die Schüler:innen müssen den bzw. die Fehler identifizieren, falls möglich erläutern, was genau falsch ist und die falsche Lösung korrigieren. Die Reflexion typischer Fehlermuster kann bei vielen der Aktivitäten als expliziter Arbeitsauftrag umgesetzt werden.

## Literatur

- Berg, M., Götze, D. & Maske-Loock, M. (2019). *Das Zahlenbuch 4. Förderkommentar Sprache zum 4. Schuljahr*. Klett.
- Bock, A.-S. & Siegemund-Johanssen, S. (2020). Hauptsache vier dazu! Kombinatorische Entdeckungen an der Stellenwerttafel. *Grundschule Mathematik – Stellenwert und Bündeln*, (64), 16-19.
- Fromme, M. (2017). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100. Theoretische und empirische Analysen*. Springer.
- Götze, D. (2017). *Sprachförderung im Mathematikunterricht* (2. Auflage). Cornelsen.
- Götze, D., Selter, C. & Zannetin, E. (2019). *Das KIRA-Buch: Kinder rechnen anders. Verstehen und Fördern im Mathematikunterricht*. Klett.
- KMK – Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.) (2022). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich Beschluss vom 15.10.2004, i. d. F. v. 23.06.2022. Download unter: [https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen\\_beschluesse/2022/2022\\_06\\_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf](https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/2022/2022_06_23-Bista-Primarbereich-Mathe.pdf) [14.07.22].
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Auflage). Springer.
- MSB – Ministerium für Schule und Bildung des Landes Nordrhein-Westfalen (Hrsg.) (2021). Lehrpläne für die Primarstufe in Nordrhein-Westfalen. Download unter: [https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp\\_PS/ps\\_lp\\_sammelband\\_2021\\_08\\_02.pdf](https://www.schulentwicklung.nrw.de/lehrplaene/upload/klp_PS/ps_lp_sammelband_2021_08_02.pdf) [Zugriff: 18.09.22]
- Nührenbörger, M., Schwarzkopf, R., Bischoff, M., Götze, D., Heß, B. & Hunscheidt, D. (2017). *Das Zahlenbuch 3*. Klett.
- Scherer, P. (1995). Ganzheitlicher Einstieg in neue Zahlenräume – auch für lernschwache Schüler?! In G. N. Müller & E. C. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 151-164). Arbeitskreis Grundschule.
- Scherer, P. (2003). *Produktives Lernen für Kinder mit Lernschwächen: Fördern durch Fordern. Band 2: Hunderterraum/Addition & Subtraktion*. Persen Verlag.
- Selter, C., Prediger, S., Nührenbörger, M. & Hußmann, S. (2014). *Mathe sicher können – Natürliche Zahlen. Handreichungen für ein Diagnose- und Förderkonzept zur Sicherung mathematischer Basiskompetenzen*. Cornelsen.
- Selter, C. & Spiegel, H. (1997). *Wie Kinder rechnen*. Klett-Grundschulverlag.
- Spiegel, H. (1997). Kinder auf dem Weg zum Dezimalsystem. In E. Glumpler & S. Luchtenberg (Hrsg.), *Jahrbuch Grundschulforschung. Band 1* (S. 276-285). Deutscher Studienverlag.
- Wittmann, E. C. (1985). Objekte – Operationen – Wirkungen: Das operative Prinzip in der Mathematikdidaktik. *mathematik lehren*, (11), 7-11.
- Wittmann, E. C. (1992). Üben im Lernprozeß. In E. C. Wittmann & G. N. Müller (Hrsg.), *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band 2: Vom halbschriftlichen zum schriftlichen Rechnen* (S. 175-182). Klett.
- Wittmann, E. C. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42-65). Cornelsen Scriptor.