

## Fördermaterial

### zu „Knack die Box“ (Äquivalenzumformung)

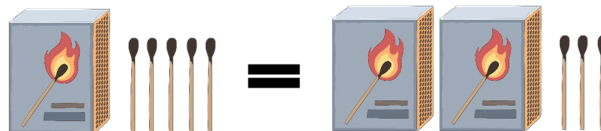
Von Tobias Domokos, Macarena Larrain, Lukas Weith, Bärbel Barzel, Marita Friesen, Anika Dreher & Lars Holzäpfel

#### 1 Knack die Box

Finn und Viktoria machen Mathehausaufgaben. Can kommt und fragt nach:



Was macht ihr da?  
Warum benutzt ihr Streichhölzer?



Wir versuchen eine Gleichung zu lösen.  
In jeder Box sind gleich viele Streichhölzer.

Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens sind  
insgesamt gleich viele Streichhölzer. Manche  
Streichhölzer sind in den Schachteln versteckt.





Hilf Can herauszufinden, wie viele Streichhölzer in einer Schachtel sind.  
Du darfst die Schachteln nicht öffnen. Wie bist du vorgegangen?

Auf beiden Seiten können 3 Streichhölzer entfernt werden, sodass rechts nur noch zwei Boxen und links eine Box und zwei Streichhölzer zu sehen sind. Nun kann auf jeder Seite eine Box entfernt werden, sodass rechts noch eine Box und links zwei Streichhölzer zu sehen sind. Somit müssen in jeder Box zwei Streichhölzer sein (2 Streichhölzer = 1 Box)

## 2 Gleichungen mit „Knack die Box“ lösen



- a) Viktoria hat die Gleichung mithilfe von Streichhölzern gelöst. Dazu hat sie jeden Schritt auch schriftlich notiert. Versuche, ihr Vorgehen nachzuvollziehen.

Bild	Gleichung	Erklärung
	$5x + 4 = 3x + 10$	Die Streichhölzer und Streichholzpackungen kann man mit der Gleichung $5x + 4 = 3x + 10$ ausdrücken
	$5x + 4 - 3x = 3x + 10 - 3x$ $2x + 4 = 10$	Ich nehme auf beiden Seiten 3 Streichholzschachteln weg, damit rechts keine mehr ist. In der Gleichung muss ich also auf beiden Seiten $3x$ abziehen.
	$2x = 6$	Ich nehme auf beiden Seiten 4 Streichhölzer weg, damit links keine mehr sind. In der Gleichung muss ich also 4 auf beiden Seiten abziehen.
	$x = 3$	Ich teile die Streichhölzer in zwei gleich große Mengen auf. Nachdem ich das getan habe entferne ich einen Teil auf beiden Seiten.
  	$5x + 4 = 3x + 10$ $\downarrow x = 3$ $5 \cdot 3 + 4 = 3 \cdot 3 + 10$ $15 + 4 = 9 + 10$ $19 = 19$	Um das Ergebnis zu überprüfen, setze ich in die oberste Gleichung den Wert für die Variable in die Variable ein (Im Bild ersetze ich jedes orangene Kästchen durch 3 Streichhölzer). Es passt: Auf beiden Seiten sind gleich viele Streichhölzer



- b) Finn hat seine Gleichung mithilfe Streichhölzern und Streichholzpackungen gelöst, hat aber Probleme, seinen Weg als Gleichung und Text zu beschreiben. Kannst du ihm helfen, indem du die leeren Felder in der Tabelle ausfüllst?

Bild	Gleichung	Erklärung
	$2x + 6 = 5x + 3$	Die Streichhölzer und Streichholzpackungen kann man mit der Gleichung $2x+6=5x+3$ ausdrücken.
	$2x + 6 - 2x = 5x + 3 - 2x$ $6 = 3x + 3$	Ich nehme auf beiden Seiten zwei Streichholzpackungen weg, sodass links keine mehr ist. In der Gleichung muss ich also auf beiden Seiten $2x$ abziehen.
	$6 = 3x + 3$ $3 = 3x$	Ich nehme auf beiden Seiten 3 Streichhölzer weg, damit rechts keine mehr sind. Dann teile ich die Streichhölzer in drei gleichgroße Mengen auf.
	$x = 1$	Nachdem ich die Streichhölzer in 3 gleichgroße Mengen aufgeteilt habe, entferne ich zwei Teile auf beiden Seiten.
	$2x + 6 = 5x + 3$ $\downarrow x = 1$ $2 \cdot 1 + 6 = 5 \cdot 1 + 3$ $3 + 6 = 6 + 3$ $9 = 9$	Um das Ergebnis zu überprüfen, setze ich in die oberste Gleichung den Wert für die Variable in die Variable ein (im Bild ersetze ich jedes orangene Kästchen durch 1 Streichholz). Es passt: Auf beiden Seiten sind gleich viele Streichhölzer.



c) Wie würdest du folgende Gleichung lösen? Fülle dazu die Tabelle aus.

Bild	Gleichung
	$4x + 2 = x + 8$
	$3x + 2 = 8$
	$3x = 6$
	$3x = 6$
	$x = 2$

### 3 Äquivalenzumformung



- a) Umformungen (wie in Aufgabe 2), bei denen man auf beiden Seiten das gleiche verändert, nennt man Äquivalenzumformungen. Viktoria hat folgende Äquivalenzumformung durchgeführt. Versuche jeden einzelnen Schritt nachzuvollziehen. Achte dabei besonders darauf, wo sie  $+$ ,  $-$ ,  $\cdot$  oder  $:$  rechnet, wie sie das notiert und versuche zu verstehen, warum sie das so macht.

Gleichung	Was sich Viktoria gedacht hat:
$3x - 7 = 4x - 5$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Variable soll am Ende auf der rechten Seite stehen, da es auf der rechten Seite mehr <math>x</math> gibt.</li> <li>Die Zahl soll dann auf der linken Seite stehen, damit man den Wert der Variable direkt ablesen kann.</li> </ul>
$3x - 7 = 4x - 5 \quad   -3x$ $3x - 7 - 3x = 4x - 5 - 3x \quad   -4$ $-7 = x - 5$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Variable auf der linken Seite wegnehmen.</li> <li>Dasselbe auch auf der rechten Seite machen, also auch <math>3x</math> wegnehmen.</li> </ul>
$-7 = x - 5 \quad   +5$ $-7 + 5 = x - 5 + 5$ $-2 = x$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Zahl auf der rechten Seite entfernen.</li> <li>Dasselbe auch auf der linken Seite entfernen.</li> </ul>
$3 \cdot (-2) - 7 = 4 \cdot (-2) - 5$ $(-6) - 7 = (-8) - 5$ $-13 = -13$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Um das Ergebnis zu überprüfen, setze ich <math>(-2)</math> für jedes <math>x</math> ein und beobachte, ob die Gleichung stimmt.</li> <li><math>x</math> entspricht <math>(-2)</math>. Ich kann also <math>(-2)</math> für jedes <math>x</math> einsetzen, damit die Gleichung stimmt.</li> <li><math>x</math> entspricht <math>-2</math>.</li> </ul>

Kannst du erklären, warum Viktoria im dritten Schritt  $+5$  gerechnet hat und nicht  $-5$ ?

Damit die Zahl auf der rechten Seite entfernt werden kann, muss der Zahlenwert rechts 0 ergeben. Um vom Wert  $-5$  auf 0 zu kommen, muss der Wert 5 addiert werden.

Würde man  $-5$  rechnen, wäre der Wert auf der rechten Seite bei  $-5 - 5 = -10$ .



- b) Mia hat auch eine Äquivalenzumformung durchgeführt. Sie hat jedoch einige Schritte übersprungen. Fülle die Lücken aus.

Gleichung	Was sich Mia gedacht hat:
$2x - 7 = -x - 1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Variable soll am Ende auf der linken Seite stehen.</li> </ul>
$2x - 7 = -x - 1$ $2x - 7 + x = -x - 1 + x$ $3x - 7 = -1$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ich entferne die Variable auf der rechten Seite.</li> <li>Dasselbe entferne ich auch auf der linken Seite.</li> </ul>
$3x - 7 = -1$ $3x - 7 + 7 = -1 + 7$ $3x = 6$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ich entferne die Zahl auf der linken Seite.</li> <li>Dasselbe entferne ich auch auf der rechten Seite.</li> </ul>
$3x = 6$ $3x : 3 = 6 : 3$ $x = 2$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ich teile beide Seiten durch 3, damit die Variable alleine steht.</li> </ul>
$2 \cdot 2 - 7 = -2 - 1$ $-3 = -3$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Um das Ergebnis zu überprüfen, setze ich 2 für jedes <math>x</math> ein und prüfe, ob die Gleichung stimmt.</li> </ul>



- c) Can hat bei der Äquivalenzumformung ziemlich Probleme. Kannst du seine Fehler finden? Markiere die Fehler von Can und schreibe die richtige Gleichung in die rechte Spalte der Tabelle.

Gleichung	Was sich Can gedacht hat:	Meine Lösung:
$-5x - 2 = 2x - 23$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Die Variable soll am Ende auf der rechten Seite stehen.</li> </ul>	
$-5x - 2 = 2x - 23$ $-5x - 2 - 5x = 2x - 23 - 5x$ $-2 = -3x - 23$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ich entferne die Variable auf der linken Seite.</li> <li>Dasselbe mache ich auch auf der rechten Seite.</li> </ul>	$-5x - 2 = 2x - 23 \quad   +5x$ $-5x - 2 = 2x - 23 + 5x$ $+5x$ $-2 = 7x - 23$
$-2 = -3x - 23$ $-2 + 23 = -3x - 23 + 23$ $21 = -3x$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ich entferne die Zahl auf der rechten Seite.</li> <li>Dasselbe mache ich auch auf der linken Seite.</li> </ul>	$-2 = 7x - 23 \quad   +23$ $-2 + 23 = 7x - 23 + 23$ $21 = 7x$
$21 = -3x$ $21 : 3 = -3x : 3$ $7 = x$	<ul style="list-style-type: none"> <li>Ich teile durch eine Zahl, damit die Variable alleine steht.</li> </ul>	$21 = 7x \quad   :7$ $21 : 7 = 7x : 7$ $3 = x$
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Um das Ergebnis zu überprüfen, setze ich meine Lösung für jedes x ein und prüfe, ob die Gleichung stimmt.</li> </ul>	$-5 \cdot 3 - 2 = 2 \cdot 3 - 23$ $-15 - 2 = 6 - 23$ $-17 = -17$



- d) Fülle die Tabelle selbstständig aus.

Gleichung	Was ich mir dabei gedacht habe:
$2x - 10 = x + 2$	Die Variable soll am Ende auf der rechten Seite stehen.
$2x - 10 = x + 2$ $2x - 10 - 2x = x + 2 - 2x$ $-10 = -x + 2$	Ich entferne die Variable auf der linken Seite. Dasselbe mache ich auch auf der rechten Seite.
$-10 = -x + 2$ $-10 - 2 = -x + 2 - 2$ $-12 = -x$	Ich entferne die Zahl auf der rechten Seite. Dasselbe mache ich auch auf der linken Seite.
$-12 = -x$ $-12 : (-1) = -x : (-1)$ $12 = x$	Ich teile durch -1, damit die Variable alleine steht.
$2 \cdot 12 - 10 = 12 + 2$ $24 - 10 = 14$ $14 = 14$	Um mein Ergebnis zu überprüfen, setze ich meine Lösung für jedes x ein und prüfe, ob die Gleichung stimmt.

## 4 Äquivalenzumformung verstehen



- a) Wer von Can, Emily und Viktoria hat recht?  
Überlege dir: Bleiben die Terme nach dem Umformen gleich? Was meint Viktoria damit, dass immer gleich viele Streichhölzer auf beiden Seiten liegen?

Can hat Unrecht, die Terme dürfen sich mit dem Umformen verändern, allerdings muss auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stets dieselbe Veränderung durchgeführt werden. Emily's Aussage ist insofern korrekt, dass sich Lösungsmenge der Gleichung nicht verändert, solange man auf beiden Seiten der Gleichung dieselbe Rechenoperation durchführt. Viktoria meint, dass immer gleichviele Streichhölzer auf beiden Seiten vorhanden sind, da man zu jedem Zeitpunkt auf beiden Seiten die gleiche Menge an Streichhölzern hinzufügt oder wegnimmt. Somit ist die Gleichheit immer erfüllt.



Can

Müssen die Terme beim Umformen nicht gleich bleiben?



Viktoria

Die Terme verändern sich, aber es liegen immer gleich viele Streichhölzer auf beiden Seiten.  $x = 2$  ist ja irgendwie dasselbe wie  $2x = 4$ , weil  $x$  den gleichen Wert hat.



Emily

Man muss vor allem aufpassen, dass sich die Lösungsmenge nicht ändert.



- b) Erkläre Viktorias Bemerkung, indem du die Gleichung aus Aufgabe 1b) nimmst und nach jedem Schritt die Lösung zur Kontrolle einsetzt. Was fällt dir auf?

---



---

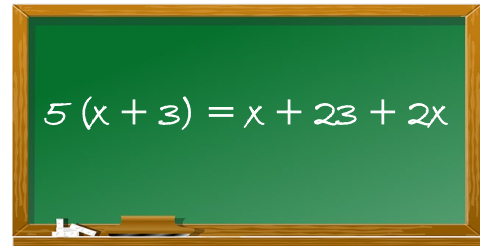


---

## 5 Äquivalenzumformung vergleichen



Emily und Viktoria haben die Gleichung unterschiedlich gelöst. Schaue dir beide Lösungswege genau an.



Emily

$$\begin{array}{rclcl}
 5(x+3) & = & x + 23 + 2x & & \\
 5x + 15 & = & 3x + 23 & | -5x & \\
 15 & = & -2x + 23 & | -23 & \\
 -8 & = & -2x & | : (-2) & \\
 4 & = & x & & 
 \end{array}$$

Viktoria

$$\begin{array}{rclcl}
 5(x+3) & = & x + 23 + 2x & & \\
 5x + 15 & = & 3x + 23 & | -3x & \\
 2x + 15 & = & 23 & | -15 & \\
 2x & = & 8 & & \\
 x & = & 4 & & 
 \end{array}$$



**b)** Erkläre, worin sich ihre Lösungswege unterscheiden. Warum sind die Ergebnisse gleich?

Emily hat sich dazu entschieden, rechts die Zahlen zu entfernen und links die  $x$  zu entfernen, während Viktoria es umgekehrt gelöst hat. Da beide auf beiden Seiten immer die gleiche Rechenoperation anwenden, erhalten sie das identische Ergebnis.