Handreichung zu Fördermaterial

Grundlagen zu Variablen, Termen und Gleichungen

Tobias Domokos, Macarena Larrain, Lukas Weith, Bärbel Barzel, Anika Dreher, Marita Friesen & Lars Holzäpfel

Juni 2023

Zitierbar als Domokos, T., Larrain, M., Weith, L., Barzel, B., Dreher, A., Friesen, M. & Holzäpfel, L. (2023). Handreichung zu den Materialien des Projekts MaCo – Grundlagen zu Variablen, Termen und Gleichungen. Open Educational Resources.

Projektherkunft Diese Handreichung und die in ihr vorgestellten Materialien wurden für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet (gemeinsam von den Ländern finanziert).

Vorwort

Liebe Kolleginnen und Kollegen,

Algebra ist ein Thema des Mathematikunterrichts, das für viele Schülerinnen und Schüler sehr abstrakt ist und deshalb Gefahr läuft, sinnfrei zu erscheinen. Gleichzeitig können gerade im Algebraunterricht mathematische Ideen und Konzepte vermittelt werden, die über das bloße Kalkül hinausgehen und ein tieferes Verständnis von Zusammenhängen und Strukturen ermöglichen. Bleibt das Verständnis dafür aus, finden die Lernenden kaum einen Zugang zu Formeln oder Termumformungen, was schnell darin endet, dass Regeln auswendig gelernt werden.

Mit den hier vorgestellten Materialien wollen wir Ihnen Anregungen für einen verstehensorientierten Unterricht geben. Eine fokussierte Diagnose dient als Ausgangspunkt für die Gestaltung von Lernprozessen. Eingangsdiagnosen in Form von kurzen Tests geben eine Orientierung, wo die Lernenden stehen und welche Dinge sie noch gezielt lernen müssen. Passend zu dem Lernstand können Sie gezielt Förderangeboten auswählen.

Wir wünschen Ihnen einen erfolgreichen Unterricht, der Ihren Schülerinnen und Schüler einen verständnisvollen Zugang zur Algebra ermöglicht!

Bärbel Barzel, Anika Dreher, Marita Friesen, Lars Holzäpfel, Tobias Domokos, Macarena Larrain und Lukas Weith

Inhalt

1 Diagnose mit den SMART-Checks

Die SMART-Checks sind diagnostische Tests, die Fehlvorstellungen von Lernenden offenlegen sollen. Auf der Website des Projekts MaCo (maco.dzlm.de) stehen Tests mit vier Themenschwerpunkten aus den Grundlagen der Algebra zur Verfügung. Jeder Test ist in zwei Versionen (A und B) verfügbar und beinhaltet eine eigene kurze Handreichung mit Hinweisen zur Durchführung und Auswertung sowie zur Förderung bei einem bestimmten Ergebnis. Im Folgenden werden die Tests kurz vorgestellt.

Bedeutung von Variablen erfassen

Dieser Test überprüft, ob Lernende verstanden haben, dass Variable in der Algebra für numerische Werte stehen. Viele Schülerinnen und Schüler interpretieren und verwenden Variable als Abkürzungen für Wörter oder Gegenstände und denken, dass Algebra nur eine Art mathematische Kurzschreibweise ist. Diese Fehlvorstellung kann die Ursache für Schwierigkeiten beim Aufstellen von Termen sein.

Werte für Variablen einsetzen

Dieser Test überprüft, inwiefern Lernende verstehen, welche Werte für Buchstaben eingesetzt werden können. Dazu gehört,

- dass innerhalb eines Terms derselbe Buchstabe immer für denselben Wert steht (Bedeutungskonstanz),
- dass, wenn es einen zweiten Buchstaben gibt, dieser entweder denselben Wert annehmen kann wie der erste Buchstabe oder einen anderen Wert,
- dass die Position des Buchstabens im Alphabet keine Rolle für den Wert der Variablen spielt.

Lineare Gleichungen aufstellen

Dieser Test überprüft die Fähigkeit, eine lineare Gleichung aus Informationen aufzustellen, die in einem Diagramm oder einer Situationsbeschreibung gegeben sind. Die Situationen erfordern alle das Addieren von Termen wie x, $3x$, 67 oder $x + 12$. Es werden keine komplexen Gleichungen mit Klammern oder algebraischen Brüche usw. behandelt, sodass der Umfang der überprüften Gleichungsarten begrenzt ist.

Lineare Gleichungen lösen

Dieser Test überprüft die Fähigkeit, lineare Gleichungen mit einer Variablen zu lösen, wobei die komplexeste Gleichung folgendem Aufbau folgt: $ax + b = cx + d$ (z. B. $4x + 6 = x + 1$).
Das Formulieren von Gleichungen und das anschließende Lösen dieser Gleichungen ist ein zentraler Bestandteil der Anwendung von Algebra und nimmt zu Recht einen großen Teil des Algebra-Lehrplans ein. Sowohl das Formulieren als auch das Lösen zu lernen ist wichtig. Das Lösen ist für viele Arten von Gleichungen weitgehend Routine, aber wenn gelernt wird, wie die Gleichungen verändert werden können, dann sollte dies auf dem Verständnis aufbauen, dass auf beiden Seiten das Gleiche tun“ die Gleichheit bewahrt.

2 Überblick über das Lernmaterial

Variable	Terme	Gleichungen
Zahlenterme 1. Veränderte Situation, veränderter Zahlenterm 2. Kosten gerecht aufteilen 3. Jährliche Kosten für ein Kaninchen 4. Jährliche Kosten für eine Katze 5. Zahlenterme mit Klammern	**Terme zu Sachsituationen aufstellen** 1. Terme zu Sachsituationen finden und umgekehrt 2. Wofür steht die Variable in jedem Term? 3. Terme aufstellen und erklären 4. Problemlösen mit Termen: Wo steht die Variable? 5. Situationen zu Termstrukturen erfinden 6. Kosten für einen Ausflug berechnen	**Einführung von Gleichungen** 1. Die Waage 2. Aus Rechenausdrücken werden Gleichungen 3. Die Bedeutung einer Gleichung 4. Das Gleichheitszeichen und seine Bedeutungen
Die Bedeutung von Variablen 1. Einen Rechenausdruck mit einer Variablen erarbeiten 2. Die Bedeutung von Variablen verstehen und erklären 3. Die Bedeutung von Variablen selbst bestimmen 4. Die gleiche Variable kommt mehrmals vor	**Gleichwertigkeit von Termen** 1. Punkte geschickt zählen 2. Muster in Bilderfolgen erkennen 3. In Bilderfolgen geschickt weiterzählen 4. In Zahlenfolgen weiterzählen 5. Zahlen an hohen Stellen 6. Zahlenfolgen beschreiben und berechnen 7. Mit verschiedenen Termen verallgemeinern I 8. Mit verschiedenen Termen verallgemeinern II 9. Terme vergleichen 10. Terme auf verschiedenen Arten vergleichen	**Gleichungen lösen** 1. Knack die Box 2. Gleichungen mit „Knack die Box“ lösen 3. Äquivalenzumformung 4. Äquivalenzumformung verstehen 5. Äquivalenzumformung vergleichen
Zwei Variablen in einer Rechnung 1. Wissen über unbekannte Zahlen ausdrücken 2. Zwei Lösungen vergleichen 3. Die Beziehung zwischen zwei Variablen ausdrücken	**Terme zusammenfassen** 1. Terme mit einer Variable addieren und subtrahieren 2. Terme mit zwei Variablen addieren und subtrahieren 3. Kurze und lange Terme	**Gleichungen aufstellen** 1. Gleichungen deuten 2. Gleichungen aufstellen 3. Stromtarife vergleichen 4. Wann Terme? Wann Gleichungen? 5. Ein Besuch im Zoo

3 Variable

Theoretische Grundlagen

Variable als Zahlen verstehen/„Obstsalat-Algebra"

„[Bei] der Einführung von Variablen wird manchmal mit Obst gerechnet: [Solche Eselsbrücken] können zwar kurzfristig helfen (z. B. bei der Summenbildung), an anderer Stelle aber Probleme verursachen. Wenn Terme wie z. B. 3x · 4y veranschaulicht werden sollen, ist das mit Obst unmöglich. Wenn Terme zu Sachsituationen aufgestellt werden, führen Objekt-Zahl-Verwechslungen zu Fehlern. Variablen werden nicht für Anzahlen, sondern für die Objekte (a = Apfel) […] verwendet. […] Langfristig problematisch wird dies beim Aufbau des funktionalen Verständnisses, etwa bei Funktionsgleichungen der Form y = mx + c (eine Obstsorte kann eben nicht funktional abhängig von einer anderen Obstsorte sein)." (Blomberg & Marxer, 2017, S. 14 f.)

Variablenrollen und -aspekte

Variablen können verschiedene Rollen einnehmen. Um Situationen mit beliebigen Größen mit Variablen zu fassen oder Rechengesetze allgemein zu formulieren, braucht man die Vorstellung, dass die Variable eine *allgemeine Zahl* beschreibt. Egal wie groß die Seitenlängen *a* und *b* sind, man kann den allgemein gedachten Flächeninhalt eines Rechtecks immer mit der Formel $a \cdot b$ beschreiben.
Untersucht man, wie sich eine Größe mit einer anderen ändert (z. B. in der Beschreibung eines Funktionsgraphen, *y = mx + c)*, so deutet man die von der Variablen repräsentierte Zahl bewusst funktional, also als *Veränderliche.*
Bei einem Zahlenrätsel oder beim Lösen von Gleichungen dominiert die Vorstellung, dass man eine konkrete Zahl sucht, die man noch nicht kennt, aber durch Rechnungen herausfinden kann (*Unbekannte).*
Neben den verschiedenen Rollen von Variablen gibt es auch typische Tätigkeiten zum Umgang mit Variablen: *Einsetzen, Rechnen,* und das Aufstellen von Termen und Gleichungen, um Situationen zu *beschreiben.* (vgl. Barzel et al., 2021, S. 8 f.)

Algebra durch das Strukturieren und Verallgemeinern von Zahlentermen vorbereiten

Algebraisches Denken beginnt nicht mit dem Umformungskalkül, sondern viel früher beim Verstehen arithmetischer Operationen und ihrer Wirkungen. Eine der wichtigsten algebraischen Denkhandlungen ist das Verallgemeinern: also aus vielen einzelnen Fällen ein allgemeines Muster oder einen allgemeinen Zusammenhang herzuleiten.
Die Auseinandersetzung mit einer einfachen Folge von Punktmustern, die gedanklich fortzusetzen ist, beginnt mit Fragen wie: *Wie sieht das zehnte Muster aus? Wie viele Punkte hat es?* und dann *Wie viele Punkte hat ein beliebiges Muster in der Folge, mit der Nummer n?* Für eine Antwort müssen Lernende ein gemeinsames Bauprinzip der gegebenen Muster finden. Dazu müssen sie die Bilder der Folge in einer einheitlichen Weise strukturieren. (vgl. Fischer et al., 2010, S. 2 f.)

Die Lernmaterialien

Es gibt Lernmaterialien zu drei Themenschwerpunkten: **Zahlenterme**, **Die Bedeutung von Variablen** und **Zwei Variable in einer Rechnung**. Zu jedem Themenschwerpunkt gibt es ein Erklärvideo und dazu eine Datei mit Fördermaterialien für Lernende (u. a. Übungsaufgaben). Video und Fördermaterialien sind jeweils so konzipiert, dass sie einander ergänzen und gemeinsam eingesetzt werden können, aber auch einzeln, unabhängig voneinander, genutzt werden können.

a) Zahlenterme

Erklärvideo

Es wird erklärt, wie man konkrete Situationen mit einer passenden Rechnung beschreiben kann. Für eine solche Rechnung wird der Begriff *Zahlenterm* eingeführt.
Wichtig ist, dass die einzelnen Rechenschritte zum Ausdruck bringen, wie vorgegangen wird. Das Ergebnis steht also hier nicht im Vordergrund. Es wird nach und nach ein passender Term aufgestellt, der die gegebene Situation rechnerisch beschreibt (eine sprachlich-situative **Darstellung** wird mit einer formal-symbolischen **verknüpft**). So soll ein Verständnis dafür geschaffen werden, wie der Zahlenterm arithmetisch strukturiert ist und wie diese Struktur aus der zu beschreibenden Situation hervorgeht.
Im Anschluss wird die Situation leicht verändert und das Video erklärt, wie daraufhin der Zahlenterm angepasst werden muss. Dies vertieft einerseits das Verständnis für den Zusammenhang zwischen Term und Situation. Andererseits wird das **Verständnis von Variablen als veränderliche Zahlen** vorbereitet, denn einzelne Bestandteile des Zahlenterms verändern sich mit Veränderung der Situation.
Wenn der Wert des Zahlenterms ausgerechnet wird, werden einige **Rechenregeln** (Punkt vor Strich, Umgang mit Klammern) wiederholt und **inhaltlich begründet**.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Veränderte Situation, veränderter Zahlenterm Die Lernenden verknüpfen die sprachliche Beschreibung einer Situation mit ihrer Darstellung als Zahlenterm. Wenn an der Situation Änderungen vorgenommen werden, erarbeiten sie, wie die entsprechende Änderung am Zahlenterm aussieht. Dadurch vertieft sich das Verständnis der Termstrukturen. Diese Aufgabe knüpft direkt an das Erklärvideo an. Sie ist am effektivsten, wenn sie nach Anschauen des Videos bearbeitet wird.
2. Kosten gerecht aufteilen Die Schülerinnen und Schüler erfahren den Nutzen von Zahlentermen, um Entscheidungen in einer lebensnahen Situation zu treffen. Sie verknüpfen verschiedene Vorschläge aus der beschriebenen Situation mit passenden Zahlentermen. Wenn an der Situation Änderungen vorgenommen werden, erarbeiten sie, wie die entsprechenden Änderungen an den Zahlentermen aussehen. Dadurch vertieft sich das Verständnis der Termstrukturen.

3. Jährliche Kosten für ein Kaninchen Die Lernenden entwickeln ein Verständnis für die Struktur eines Zahlenterms, indem sie einen Zahlenterm anhand der dazugehörigen Situation analysieren. Die Aufgabe bietet eine gute Gelegenheit, um Regeln beim Klammernsetzen und „Punkt vor Strich“ zu wiederholen und inhaltlich zu erklären.
4. Jährliche Kosten für eine Katze Die Lernenden vertiefen ihr Verständnis für die Struktur eines Zahlenterms, indem sie die Schritte beim Aufstellen des Zahlenterms mit den entsprechenden Kostenpunkten in der Situation verknüpfen. Die Summanden des Zahlenterms sind jeweils in Klammern gesetzt, die eigentlich nicht notwendig wären. Das soll der Verdeutlichung dienen, welche Rechenschritte zum gleichen Kostenpunkt in der Situation gehören. Hier sollte für die Lernenden angesprochen werden, dass die Klammern an diesen Stellen nicht nötig, aber auch nicht falsch sind.
5. Zahlenterme mit Klammern Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein Verständnis für die Regeln und Konventionen beim Setzen von Klammern. Sie erleben außerdem, wie sich das Setzen verschiedener Klammern in einem ansonsten identischen Zahlenterm auswirkt. Da hier viel gerechnet wird, ist die Aufgabe sehr anfällig für Rechenfehler. Es bietet sich an, die Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse gegenseitig überprüfen bzw. vergleichen zu lassen.

b) Die Bedeutung von Variablen

Erklärvideo

In diesem Video wird der Gebrauch von Variablen aus einer Situation heraus sinnvoll motiviert. Damit soll zunächst klargemacht werden, welchen Zweck Variablen grundsätzlich erfüllen: Sie stehen für Zahlen, die (noch) nicht genau bekannt sind oder sich verändern.
Die Variable kommt in verschiedenen Rollen vor: als **Veränderliche** und als **allgemeine Zahl**. Es wird also zum Aufbau und zur Vernetzung beider Grundvorstellungen beigetragen. Außerdem werden mit der Variable verschiedene Handlungen durchgeführt: mit der Variable wird eine Situation beschrieben (**Gegenstandsaspekt),** später werden für die Variable verschiedene Zahlen eingesetzt (**Einsetzungsaspekt**). Das Einsetzen wird im Video explizit angesprochen und als wichtige mathematische Tätigkeit eingeführt.
Es wird explizit aufgeschrieben und auch danach mehrmals erwähnt, wofür die Variable jeweils steht. Das soll das Verständnis von Variablen, dass sie stets für Zahlen stehen, fördern, um so der **Fehlvorstellung** entgegenzuwirken, dass **Variable für Objekte** stehen. Außerdem wird die **Beliebigkeit der Buchstabenwahl** betont, um der Entwicklung des sog. *Alphabetfehlers* (Fehlvorstellung, dass ein Zusammenhang zwischen dem Buchstaben und dem Wert der Variable besteht) vorzubeugen.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Einen Rechenausdruck mit einer Variablen erarbeiten Die Lernenden vertiefen ihr Verständnis dafür, was eine Variable ist und wofür sie eingesetzt werden kann. Vor allem die Grundvorstellung der Variable als Veränderliche steht hier im Vordergrund. Der Ablauf dieser Aufgabe ist der gleiche wie im Erklärvideo, nur mit einer anderen Situation. Deshalb bietet es sich an, dass die Lernenden die Aufgabe bearbeiten, nachdem sie das Video geschaut haben. So können sie das im Video Gelernte selbst anwenden.
2. Die Bedeutung von Variablen verstehen und erklären Variable werden mit inhaltlicher Bedeutung versehen, indem ihre Beziehung zur sprachlichen Beschreibung einer Situation tiefgehend analysiert wird. Es sollte Wert auf sprachliche Genauigkeit gelegt werden. Z. B ist in Teilaufgabe b) die dritte Antwortmöglichkeit („die Länge von meinem Lieblingslied“) die richtige, und es sollte klar gemacht werden, wieso die anderen Antwortmöglichkeiten nicht stimmen.
3. Die Bedeutung von Variablen selbst bestimmen Variable werden mit inhaltlicher Bedeutung versehen, indem ihre Beziehung zur sprachlichen Beschreibung einer Situation tiefgehend analysiert wird. Auch hier ist sprachliche Genauigkeit von großer Bedeutung. Lernende können z. B. ihre Antworten miteinander vergleichen und reflektieren, welche Formulierungen stimmen und welche nicht. Aufgabe 2 bietet sich als vorbereitende Aufgabe an.
4. Die gleiche Variable kommt mehrmals vor Die Schülerinnen und Schüler üben, die inhaltliche Bedeutung einer Variablen zu erkennen. Aufbauend darauf reflektieren sie dann, was es bedeutet, wenn die gleiche Variable in einem Rechenausdruck mehrmals vorkommt.

c) Zwei Variablen in einer Rechnung

Erklärvideo

In der Situation im Video kommen zwei unbekannte Größen vor, für die zwei Variable sinnvoll eingesetzt werden können. Beim Einführen der Variablen wird besonders hervorgehoben, wofür die Variablen stehen. Das unterstützt die Vorstellung, dass Variablen für Zahlen stehen und nicht für Objekte. Die Variablen nehmen im Video verschiedene Rollen ein und werden unter verschiedenen Aspekten genutzt: Sie repräsentieren sowohl veränderliche als auch allgemeine Zahlen, sie werden zum Beschreiben einer Situation (Gegenstandsobjekt) genutzt und es werden Zahlen für sie eingesetzt (Einsetzungsaspekt).
Eine zentrale Thematik im Video ist die **Wahl des Buchstaben** als Symbol für eine Variable. Die **Beliebigkeit** der Buchstabenwahl wird mehrmals betont, das Video rät aber auch ausdrücklich davon ab, die Anfangsbuchstaben der Personen in der Situation für die Variablen zu wählen. Dadurch verstärkt sich nämlich die Fehlvorstellung, dass Variablen für Objekte stehen.
Das Video beinhaltet einige Elemente, die der Entwicklung des sog. **Alphabetfehlers** vorbeugen sollen – also der Fehlvorstellung, dass ein Zusammenhang zwischen dem Buchstaben und dem Wert einer Variable besteht. Es wird gezeigt, dass die Position des Buchstaben im Alphabet nicht mit dem Wert einer Variable zusammenhängt: Die Variable a nimmt mal größere und mal kleinere Werte an als die Variable b. In einem Beispiel wird deutlich, dass verschiedenen Variable sogar den gleichen Wert annehmen können.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Wissen über unbekannte Zahlen ausdrücken Anhand einer Gleichung mit zwei Variablen üben die Lernenden das Einsetzen verschiedener Werte. Die errechneten numerischen Ergebnisse deuten sie dann inhaltlich anhand einer lebensnahen Situation. Das Deuten der Ergebnisse im Kontext der Situation könnte Lernenden schwerfallen. Darauf kann beim Besprechen besondere Aufmerksamkeit gelegt werden.
2. Zwei Lösungen vergleichen Die Lernenden verstehen, dass der Buchstabe, der eine Variable repräsentiert, beliebig wählbar ist, und dass nur die inhaltliche Bedeutung der Variable eine Rolle spielt. Außerdem üben sie das Überprüfen von Lösungen durch Einsetzungsprobe. Um Verwirrung bei den Lernenden vorzubeugen, kann hier vor der Bearbeitung der Aufgabe gemeinsam reflektiert werden, worin sich die beiden Lösungen genau unterscheiden.
3. Die Beziehung zwischen zwei Variablen ausdrücken Die Lernenden üben das Aufstellen von Gleichungen mit zwei Variablen. Dabei werden zwei Hilfsstrategien gezeigt und geübt: das Nutzen einer Skizze als Hilfsdarstellung und das Überprüfen durch Einsetzen. Es sollte angesprochen werden, dass die Einsetzungsprobe keine Garantie dafür gibt, dass eine Lösung richtig ist. Auch bei einer falschen Gleichung ist es möglich, dass eine Einsetzungsprobe zufällig das richtige Ergebnis liefert.

4 Terme

Theoretische Grundlagen

Termstrukturen

Terme sind nicht erst in der Algebra, sondern bereits in der Arithmetik von Bedeutung. Schülerinnen und Schüler lernen schon in der Grundschule, wie sie Situationen mit Zahlen und Operationen beschreiben können. Da Terme von den konkreten Einzelheiten der Situation abstrahiert werden, ist es auch möglich, zahlreiche Situationen mit demselben Term zu beschreiben. Grundschülerinnen und -schüler lernen auch, wie man zu gegebenen Zahlentermen verschiedene Rechengeschichten erfinden kann.
Daran sollte im Algebraunterricht angeknüpft werden und die Erfassung von Termstrukturen zunächst anhand von Zahlentermen erarbeitet werden. Die Verknüpfung von Termen mit konkreten Situationen hilft den Lernenden, die Termstruktur zu verstehen bzw. Größen und Zusammenhänge zwischen den einzelnen Bestandteile des Terms zu erkennen. Voraussetzung dafür ist, dass die Lernenden die Situation inhaltlich durchdringen können und über ein tragfähiges Verständnis der Operationen verfügen. Wenn in einer Situation nicht alle Größen eindeutig bestimmbar sind, sondern es veränderliche oder unbekannte Größen gibt, dann werden im dazugehörigen Term Variablen benötigt. Um Schülerinnen und Schülern diesen Übergang zu erleichtern, kann man zunächst von einer konkreten Situation mit passendem Zahlenterm ausgehen, und dann durch wiederholtes Verändern einzelner Größen in der Situation bzw. einzelner Zahlen im Term die Nutzung von Variablen sinnvoll herleiten und mit Termen verknüpfen.
Beim Aufstellen von Termen eignen sich auch innermathematische Situationen, z. B. aus der Geometrie oder der Arithmetik. Bei Punktmustern ist es möglich, sich ganz auf die Variablenaspekte und Termstrukturen zu konzentrieren. Dasselbe Punktmuster kann mit verschiedenen Termen beschrieben werden, die unterschiedliche Zählweisen ausdrücken, wobei dasselbe Bild auf unterschiedliche Weise markiert werden kann.
Ein Punktmuster lässt sich als Bilderfolge fortsetzen, in der mit Veränderlichkeit experimentiert und so die Anzahl der Punktmuster in verschiedenen Stellen erfasst und schließlich mit einer Variable verallgemeinert werden kann. Eine zentrale Strategie in diesem Prozess ist die bewusste Strukturierung von Bildern. (vgl. Barzel et al., 2021)

Gleichwertigkeit von Termen

Um ein umfassendes Verständnis der Gleichwertigkeit von Termen mit Inhalt und Bedeutung aufzubauen, müssen Lernende zunächst zwei Aspekte dieser Äquivalenz verstehen:

- *Beschreibungsgleichheit*: Zwei Terme können dasselbe Bild oder dieselbe Situation auf unterschiedliche Weise beschreiben, weil sie z. B. die Struktur anders betrachten.
- *Einsetzungsgleichheit*: Beim Einsetzen die gleichen Zahlen für die Variablen in zwei gleichwertigen Termen ist das Ergebnis immer gleich.

Bilderfolgen bieten eine gute Möglichkeit, Lernenden diese beiden Aspekte zu verdeutlichen. Dabei können sie eine Vielzahl von Strategien verwenden und daher auch verschiedene, aber dennoch korrekte Terme aufstellen, die alle dasselbe beschreiben und zum selben Ergebnis beim Einsetzen führen.
Das Verständnis der Beschreibungs- und der Einsetzungsgleichheit ist eine wichtige Grundlage, um der Gleichwertigkeit von Termen Sinn und Bedeutung zu geben, bevor das Umformen von

Variablentermen eingeführt wird. Erst mit dem Umformen wird der dritte Aspekt von Gleichwertigkeit angesprochen:

- *Umformungsgleichheit*: Zwei Terme sind gleichwertig wenn man durch kalkülhafte, also regelgeleitete Umformung von einem zum anderen kommen kann.

(vgl. Barzel & Holzäpfel, 2017)

Die Lernmaterialien

Es gibt Lernmaterialien zu drei Themenschwerpunkten: **Terme aufstellen**, **Gleichwertige Terme** und **Terme zusammenfassen**. Zu jedem Themenschwerpunkt gibt es ein Erklärvideo und dazu eine Datei mit Fördermaterialien für Lernende (u. a. Übungsaufgaben). Video und Fördermaterialien sind jeweils so konzipiert, dass sie einander ergänzen und gemeinsam eingesetzt werden können, aber auch einzeln, unabhängig voneinander, genutzt werden können.

a) Terme aufstellen

Erklärvideo

In diesem Video geht es darum, Situationen mit veränderlichen Größen durch Terme zu beschreiben. Das **Erfassen der Struktur** einer Sachsituation und Übertragen auf einen Term hilft, die Sinnhaftigkeit von Termen erlebbar zu machen.

Das Erkennen der Struktur einer Situation ist entscheidend, um einen passenden Term korrekt aufstellen zu können. Deshalb wird die Struktur einer Situation zusätzlich zur Darstellung als Term auch visuell dargestellt. Dieselbe Struktur wird verwendet, um zu zeigen, dass verschiedene konkrete Situationen mit demselben Term beschrieben werden können. So wird eine Kernidee des algebraischen Denkens erfahrbar, nämlich reale Situationen zu **strukturieren** und **mathematisch zu beschreiben**.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Terme zu Sachsituationen finden und umgekehrt Die Lernenden sollen die verschiedenen Situationen betrachten und die Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Größen erkennen. Dabei sollen sie ihr Verständnis von Operationen anwenden. Umgekehrt sollen die Lernenden bei übrig gebliebenen Termen auf der Grundlage ihres Verständnisses der Termstruktur passende Situationen finden.
2. Wofür steht die Variable in jedem Term? Um den Inhalt und die Bedeutung der ersten Aufgabe zu vertiefen, sollten die Lernenden die Bedeutung der in einigen Termen verwendeten Variablen identifizieren. Dadurch wird auch das Verständnis für die Bedeutung von Variablen gestärkt. Bei Bedarf kann diese Aufgabe auch durch die restlichen Situationen von Aufgabe 1 erweitert werden.
3. Terme aufstellen und erklären Auch bei dieser Aufgabe müssen die Lernenden die Situation durchdenken und die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Größen erkennen, aber diesmal müssen sie auch den Term selbst aufstellen. Auch hier sollen sie herausfinden, wofür die Variable verwendet wird. Dies stärkt das Verständnis für die Bedeutung der Variablen und unterstützt auch das Verständnis der Situation und hilft, dem Term Struktur zu geben.

4. Problemlösen mit Termen: Wo steht die Variable? In dieser Aufgabe wird die Termstruktur vorgegeben. Daher müssen die Lernenden die drei Situationen erfassen und die Zusammenhänge zwischen den Größen und der Variable in jedem Fall erkennen. Um das Verständnis der Situation und des Terms zu unterstützen, werden die Lernenden gebeten, in jeder Situation einen Wert für die Variable zu wählen und in den Term einzusetzen, um die Plausibilität des von ihnen gebildeten Terms zu beurteilen. Auf diese Weise können sie den Variablenterm mit den Zahlenterm in Beziehung setzen.
5. Situationen zu Termstrukturen erfinden In dieser Aufgabe wird das übliche Vorgehen umgekehrt: Ausgehend von einer Termstruktur sollen dazu passende Situationen gefunden werden. Die konkreten Zahlen und die Variable können die Lernenden selbst wählen. Die Wörter im Kasten sind nur zur Hilfestellung bei Schwierigkeiten. Die Lernenden können zunächst versuchen, die Aufgabe ohne Zuhilfenahme des Kastens zu bearbeiten.
6. Kosten für einen Ausflug berechnen Diese Aufgabe stellt eine komplexere Situation dar, in der mehr Zusammenhänge zwischen Größen bestehen als in den vorherigen Aufgabenstellungen. Das Ziel ist es, einen Term aufzustellen, der für mehrere Werte der Variable verwendet werden kann. Der Prozess wird durch gezielte Fragen und leichte Veränderungen der Situation geleitet, um die Stellung und Rolle der Variablen zu ermitteln.

b) Gleichwertigkeit von Termen

Erklärvideo

Dieses Video führt in die Gleichwertigkeit von Termen ein. Das Grundverständnis für die Strukturen von Termen, und damit auch von Gleichwertigkeit, ist wichtig, um eine Gleichung aufstellen zu können, aber auch, um Terme gezielt umformen zu können. Durch das rein kalkülhafte Anwenden von Regeln werden diese nicht unbedingt verständlich und können beliebig erscheinen. Die Folge ist dann oft ein reines Auswendiglernen, was sehr fehleranfällig ist und langfristig zu Frustration führen kann. Im Gegensatz dazu hilft ein Ansatz mit Fokus auf inhaltlichem Denken den Lernenden, ein Verständnis für die **Sinnhaftigkeit der Umformungsregeln** aufzubauen. Konkret behandelt das Video zwei wesentliche Eigenschaften gleichwertiger Terme: Sie **beschreiben** dieselbe Situation oder dasselbe Bild, jeweils auf unterschiedliche Weise, und wenn man für die Variable dieselbe Zahl **einsetzt,** nehmen die Terme denselben Wert an. Das Video beginnt mit einer visuellen Darstellung einer Situation. Diese dient den Lernenden als Anhaltspunkt, um die Gleichwertigkeit von Termen nachzuvollziehen. Die symbolische Darstellung der Terme wird im Laufe des Videos immer wieder mit der visuellen Darstellung durch Punktmuster verknüpft, um eine anschauliche Vorstellung zu erleichtern.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Punkte geschickt zählen In dieser Aufgabe üben die Lernenden das bewusste Strukturieren von Elementen in einer Punktfolge auf verschiedene Weisen. Sie suchen nach verschiedenen Möglichkeiten, die Punkte im gleichen Muster zu strukturieren und zu zählen, und stellen dann zu jeder Zählweise einen passenden Zahlenterm auf.
2. Muster in Bilderfolgen erkennen Als Vorbereitung für das Aufstellen von Termen zu einer Bilderfolge fordert diese Aufgabe die Lernenden auf zu erkennen, welcher Folge die gegebenen verbalen Beschreibungen entsprechen. Dadurch lernen die Lernenden, konstante und sich verändernde Elemente in einer Bilderfolge voneinander zu unterscheiden. Das ist unter anderem für das Erkennen von Termstrukturen wesentlich.
3. In Bilderfolgen geschickt weiterzählen Bei dieser Aufgabe müssen die Lernenden selbst die konstanten und sich verändernden Elemente in Bilderfolgen identifizieren. In jeder Bilderfolge werden sie Schritt für Schritt zur Erarbeitung eines Zahlenterms angeleitet. Zunächst formulieren sie verbal eine Regel für die Bilderfolge. Anschließend zählen sie die Punkte in den einzelnen Bildern der Bilderfolge. Daraufhin nutzen die Lernenden die erkannte Struktur, um die Anzahl der Punkte in einem Bild der Bilderfolge zu berechnen, das nicht mehr abgebildet ist. Abschließend werden sie gebeten, ihre Strategie verbal zu beschreiben.
4. In Zahlenfolgen weiterzählen Diese Aufgabe verbindet das, was in den vorangegangenen Aufgaben mit Bilderfolgen gemacht wurde, mit Zahlenfolgen. Bei dieser Art von Aufgabe ist es auch wichtig, dass die Lernenden erkennen, was konstant bleibt und was sich an jeder Stelle der Folge ändert.
5. Zahlen an hohen Stellen Als Vorbereitung auf die Einführung von Variablen sollen die Schüler in dieser Aufgabe die Anzahl der Punkte an einer höheren Stelle der Bilderfolge berechnen. Dazu reicht es nicht mehr aus, die Punkte im Bild zu zählen, sondern es muss eine Gesetzmäßigkeit erkannt werden. Diese basiert darauf, was in allen Bildern der Bilderfolge konstant bleibt und was sich zwischen den Bildern ändert.
6. Zahlenfolgen beschreiben und berechnen In dieser Aufgabe werden die Lernenden Schritt für Schritt an das Aufstellen von allgemeinen Termen für Bild- und Zahlenfolgen herangeführt. Im Vordergrund steht dabei wieder die Identifikation dessen, was konstant bleibt und was sich zwischen den einzelnen Folgengliedern ändert.
7. Mit verschiedenen Termen verallgemeinern I Als Einführung in die Gleichwertigkeit von Termen stellt diese Aufgabe zwei verschiedene Möglichkeiten vor, die Elemente in derselben Bilderfolge zu zählen, und fordert die Lernenden auf, noch eine dritte Möglichkeit zu finden.
8. Mit verschiedenen Termen verallgemeinern II Diese Aufgabe fordert die Lernenden auf, allgemeine Terme für Bilderfolgen aufzustellen. Im zweiten Teil werden sie aufgefordert, mehrere Zählweisen für die Punkte zu finden, d. h. mehr als einen Term für dieselbe Bilderfolge aufzustellen.

9. Terme vergleichen In dieser Aufgabe werden gleichwertige Terme zu einer Situation gefunden. Die Lernenden müssen zunächst den Kontext verstehen und Terme finden, die dieselbe Situation beschreiben (Beschreibungsgleichheit). Dabei werden verschiedene Darstellungsarten miteinander vernetzt: graphisch, symbolisch und sprachlich. Dann ersetzen die Lernenden die Variablen durch konkrete Zahlen und berechnen den Wert der verschiedenen Terme. Auf diese Weise wird die Einsetzungsgleichheit eingeführt.
10. Terme auf verschiedenen Arten vergleichen Aufbauend auf den vorangegangenen Aufgaben werden in dieser Aufgabe explizit Beschreibungsgleichheit und Einsetzungsgleichheit als Eigenschaften gleichwertiger Termen angesprochen und systematisiert. Außerdem wird thematisiert, dass das Einsetzen einer einzigen Zahl nicht ausreicht, um die Einsetzungsgleichheit wirklich zu erfahren.

c) Terme zusammenfassen

Erklärvideo

In diesem Video wird das Zusammenfassen von Termen eingeführt. Für nachhaltiges Lernen ist es grundlegend, dass Lernende mathematische Prozesse verstehen. Der Aufbau einer soliden Grundlage, die inhaltliches Denken in den Vordergrund stellt, ermöglicht es Lernenden, **Termumformungen mit Verständnis** durchzuführen. Zu diesem Zweck erklärt das Video anhand einer alltäglichen Situation anschaulich die Strategie des Zusammenfassens von Termen. Die Variablen werden dabei explizit mit Längen assoziiert. Das ist wichtig, um ein grundlegendes Verständnis davon zu fördern, dass Variablen für Zahlen stehen, nicht für Objekte.
Verschiedene **Darstellungen** werden gleichzeitig verwendet und miteinander **vernetzt**, um den Aufbau solider Vorstellungen zu unterstützen. So wird eine alltägliche Situation sprachlich erklärt, durch eine bildliche Darstellung unterstützt und gleichzeitig mit der symbolischen Schreibweise als Term verbunden.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Terme mit einer Variable addieren und subtrahieren Mit Hilfe eines Kontextes, in dem Stiftepackungen die Variable darstellen, wird die Addition und Subtraktion von Variablentermen eingeführt. Die Verwendung dieses Modells stellt eine tragfähige Alternative zu der Strategie dar, Variablen mit Objekten zu identifizieren („Obstsalat-Algebra“).
2. Terme mit zwei Variablen addieren und subtrahieren Diese Aufgabe erweitert das Modell der vorherigen Aufgabe für die Verwendung von zwei Variablen. Dafür wird eine zweite Größe von Stiftepackungen eingeführt. Darüber hinaus wird thematisiert, wieso es sinnvoll ist, die Terme vor dem Zusammenfassen zu ordnen.
3. Kurze und lange Terme In dieser Aufgabe wenden die Lernenden die in den vorangegangenen Aufgaben erlernten Strategien zum Ordnen und Zusammenfassen von Termen an. Die Aufgabe nutzt einen geometrischen Kontext zur Veranschaulichung, und das Zusammenfassen der Terme wird zur Berechnung der Umfänge von Figuren verwendet.

5 Gleichungen

Theoretische Grundlagen

Gleichungen

„Gleichungen durchdringen die Schulmathematik von Anfang bis Ende. Lange, bevor in der Sekundarstufe Gleichungen thematisiert werden, gehen die Lernenden intuitiv mit Gleichungen und dem Begriff der „Gleichheit“ um, zum Beispiel wenn es um einfache Rechnungen oder Sachsituationen geht. Gleichungen sind der Schlüssel zu vielen inner- wie auch außermathematischen Fragen. Kurz: Mathe ohne Gleichungen – unvorstellbar! […]

Gleichungen sind – mathematisch gesprochen – eine Aussageform aus zwei gleich gesetzten Termen (wobei diese Terme in der Regel Variablen enthalten). Die Aussageform kann durch Belegung der Variablen mit Werten in eine wahre oder falsche Aussage überführt werden. (Gleichheit ist dann also nur unter bestimmten Bedingungen gegeben.) In der Mathematik werden Gleichungen zu verschiedenen Zwecken genutzt. Zum Beispiel als Beschreibung oder als Heuristik.“
(Barzel & Holzäpfel, 2011, S. 2)

Modellbasierte Ansätze zu Äquivalenzumformungen

„Modelle unterstützen das Verstehen der jeweiligen Situation (z. B. durch konkrete Handlungen, Medien) und ermöglichen es den Lernenden, die Prozeduren beim Lösen von Gleichungen (also Äquivalenzumformungen) auch selbst zu entdecken oder zu reflektieren, wenn sie bereits eingeführt wurden. Modelle können jedoch auch einen „cognitive overload“ erzeugen: Das Modell bzw. die Visualisierung an sich ist „Zusatzstoff“, der zunächst einmal nachvollzogen werden muss. […]
Beim **Waage-Modell** wird das äquivalente Umformen handelnd erfahrbar bzw. bildlich veranschaulicht. Die Seiten der Gleichung werden (samt Variablen) als „Gewichte“ einer Balkenwaage betrachtet. Äquivalente Umformungen sind dann Veränderungen, bei denen die Waage stets im Gleichgewicht bleibt: „Auf beiden Seiten das Gleiche tun“. Das Waage-Modell wird international viel diskutiert. Die Kritik lautet, dass heutzutage Kinder solche Waagen nicht mehr kennen und dass das Modell nur Gleichungen darstellen kann, bei denen neben der Variablen nur positive Zahlen vorkommen. Die Befürworter betonen die Symbolik der Waage als gutes Modell, um tragfähige Vorstellungen von Äquivalenzumformungen aufzubauen. Erwiesen ist: Das Waage-Modell unterstützt die syntaktischen Fertigkeiten und hilft, das Gleichheitszeichen als solches besser erfassen zu können.“
(Barzel & Holzäpfel, 2011, S. 6)

Das **Knack-die-Box-Modell** funktioniert nach demselben grundlegenden Prinzip wie die Waage. Die Seiten der Gleichung werden durch alltägliche Objekte, wie z. B. Streichhölzer, dargestellt. Für die Variablen nutzt man Behälter, in denen sich eine unbekannte Anzahl dieser Objekte befindet (z. B. Streichholzschachteln). Dieses Modell lässt sich unkompliziert praktisch umsetzen und ist für Lernende schnell intuitiv verständlich. Daher eignet es sich besonders gut für den Einsatz im Mathematikunterricht.

Das Gleichheitszeichen

„Bereits in der Arithmetik der Grundschule taucht das Gleichheitszeichen auf. In Aufgaben wie zum Beispiel „Berechne 16 + 17 =“ wird es als Zeichen interpretiert, mit dem eine Handlungsaufforderung, nämlich „Bestimme das Ergebnis“, verknüpft ist. Die Gleichung 16 + 17 = 33 gilt, da man die rechte Seite als Ergebnis ausgerechnet hat. Hier wird die Gleichung nicht symmetrisch gedeutet, sondern (irrtümlich) angenommen, dass das Ergebnis immer rechts steht und stehen muss. Man nennt dies „operationale“ Deutung des Gleichheitszeichens.
Mit dem Schritt von der Arithmetik zur Algebra gewinnt auch das Gleichheitszeichen an Deutungsmöglichkeiten, sodass neue Arten von Gleichungen entstehen. Wesentlich ist die Deutung als Relations- oder auch Vergleichszeichen, was besagt, dass eine Gleichung eine Beziehung zwischen zwei Termen herstellt. Neu ist, dass diese Gleichung auch von rechts nach links gelesen werden kann und nicht mehr nur von links nach rechts. Denn die Gleichheit ist (als Äquivalenzrelation) symmetrisch, d. h., wenn a = b, gilt auch b= a.“
(Barzel et al., 2021, S. 27 f.)

Die Lernmaterialien

Es gibt Lernmaterialien zu drei Themenschwerpunkten: **Einführung von Gleichungen**, **Gleichungen lösen** und **Gleichungen aufstellen**. Zu jedem Themenschwerpunkt gibt es ein Erklärvideo und dazu eine Datei mit Fördermaterialien für Lernende (u. a. Übungsaufgaben). Video und Fördermaterialien sind jeweils so konzipiert, dass sie einander ergänzen und gemeinsam eingesetzt werden können, aber auch einzeln, unabhängig voneinander genutzt werden können.

a) Einführung von Gleichungen

Erklärvideo

In diesem Video wird auf das Vorwissen der Lernende zu Variablen und Termen zurückgegriffen. Es gibt Denkanstöße dazu, wie das Thema Gleichungen **sinnstiftend und verstehensorientiert** behandelt werden kann. Inhaltliche Vorstellungen von Gleichungen sollen gefestigt werden, sodass sich das Denken der Lernenden nicht auf reines, sinnentleertes Rechnen reduziert. Dazu muss zunächst geklärt werden, was Gleichungen sind, wie sie gelöst werden können, und was das Gleichheitszeichen bedeutet. Dafür wird mit der **Waage** eine unterstützende visuelle Darstellung angeboten, mit deren Hilfe später das Prinzip von Äquivalenzumformungen erarbeitet werden kann.
Gleichzeitig kommen hier Variablen in einem neuen Kontext (erstmals in Gleichungen) vor. Daher werden zentrale Bestandteile des Variablenverständnisses aufgegriffen und sollen vertieft werden.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Die Waage Mit Hilfe dieser Aufgabe sollen Lernende ein langfristiges Verständnis von Gleichheit aufbauen und die Waage als tragfähiges Modell von Gleichungen verstehen. Ziel der Aufgabe ist es nicht, fünf Gegenstände zu finden, die genau 1 kg wiegen! Es geht hier mehr darum, den Kerngedanken der Waage enaktiv kennenzulernen und zu verinnerlichen. Leichte Ungenauigkeiten sind also vollkommen in Ordnung, da man nur mit Hilfe des eigenen Körpers Gewichte nicht perfekt abschätzen kann. Machen Sie dies als Lehrkraft – falls nötig – deutlich.
2. Aus Rechenausdrücken werden Gleichungen In dieser Aufgabe übertragen die Lernenden ihr Verständnis von Gleichheit auf Zahlenterme und erstellen damit Gleichungen.
3. Die Bedeutung einer Gleichung Mit Hilfe dieser Aufgabe sollen Lernende eine langfristige und verstehensorientierte Grundvorstellung zu Gleichungen aufbauen. Ziel dieser Aufgabe ist zudem die Kommunikationsförderung. Achten Sie darauf, dass die Lernenden ihre Gedanken genau formulieren.
4. Das Gleichheitszeichen und seine Bedeutungen In dieser Aufgabe sollen Lernende verschiedene Arten von Gleichungen voneinander unterscheiden lernen. Sie beurteilen bei verschiedenen Gleichungen, ob sie direkt rechnen können, zuerst umformen müssen oder gar nicht rechnen müssen. Dieser Aufgabentyp wird Ihren Lernende vermutlich neu sein und zunächst einige Hilfestellung erfordern. Sie können Fragestellungen dieser Art auch langfristig im Algebraunterricht etablieren, indem die Lernenden Gleichungen, die ihnen in anderen Aufgaben begegnen, zunächst wie hier analysieren.

b) Gleichungen lösen

Erklärvideo

In diesem Video sollen die Lernenden eine Vorstellung zur **Äquivalenzumformung** als rechnerischem Weg zum Lösen einer Gleichung aufbauen. Die Gleichung wird so verändert, dass bei jedem Schritt die Lösungsmenge der Gleichung erhalten bleibt. Dafür soll eine Vorstellung aufgebaut werden. Das Bild der Balance der Waage, die bei jedem Schritt bestehen bleibt, dient zunächst diesem Zweck.
Die Arbeit mit der **Waage** im Schulalltag erfolgt meistens nur als mentales Modell. Deshalb wird auch das **Knack-die-Box-Modell** eingeführt, das einfacher im Unterricht enaktiv umsetzbar ist. Anschließend wird die Idee der Äquivalenzumformung anhand dieses Modells erläutert. Ziel des Videos ist es, den Aufbau dieser Vorstellung zu unterstützen und bei einfachen Gleichungen anzuwenden. Auch typische Fehler, wie z. B. Umformungen auf nur einer Seite der Gleichung, werden implizit berücksichtigt.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Knack die Box In dieser Aufgabe geht es darum, das Modell *Knack die Box* zur Unterstützung des Verständnisses von Äquivalenzumformungen kennenzulernen und erste Erfahrungen mit Umformungen zu machen. Diese sollen nicht symbolisch niedergeschrieben, sondern nur anhand des Modells ausprobiert werden. Wichtig ist, dass die Gleichwertigkeit beider Terme bestehen bleibt.
2. Gleichungen mit „Knack die Box“ lösen In dieser Aufgabe lösen Lernende Gleichungen mit Hilfe des Modells *Knack die Box,* erklären ihr Vorgehen und notieren es symbolisch. Bei den Erklärungen sollten Sie genau auf die Formulierung achten. Z. B. deutet die Beschreibung „etwas auf die andere Seite bringen“ darauf hin, dass Lernende das Grundprinzip, nämlich dass auf beiden Seiten das Gleiche getan wird, noch nicht verstanden haben.
3. Äquivalenzumformung Lernende lösen zielgerichtet Gleichungen mit Hilfe von Äquivalenzumformungen und erklären ihr Vorgehen. Bei den Erklärungen sollten Sie genau auf die Formulierung achten. Z. B. deutet die Beschreibung „etwas auf die andere Seite bringen“ darauf hin, dass Lernende das Grundprinzip, nämlich dass auf beiden Seiten das Gleiche getan wird, noch nicht verstanden haben.
4. Äquivalenzumformung verstehen Schülerinnen und Schüler lernen das Prinzip der Äquivalenzumformung nachzuvollziehen und bauen Grundvorstellungen dazu auf.
5. Äquivalenzumformung vergleichen Die Schülerinnen und Schüler verstehen das Prinzip der Äquivalenzumformung anhand eines konkreten Beispiels und bauen Grundvorstellungen dazu auf.

c) Gleichungen aufstellen

Erklärvideo

Dieses Video soll Fragen beantworten, die beim Aufstellen von Gleichungen auftauchen können. Die Schülerinnen und Schüler sollen die Vorgehensweise beim Aufstellen einfacher Gleichungen nachvollziehen und anwenden können. Dabei werden die zentralen Fragestellungen beim Aufstellen von Gleichungen sinnstiftend und verstehensorientiert motiviert.
Es wird außerdem deutlich, dass viele verschiedene Aspekte des algebraischen Denkens beherrscht werden müssen, um Gleichungen korrekt aufstellen zu können. Um von der verbalen Beschreibung einer Situation zu einer Gleichung übersetzen zu können, ist die **Darstellungsvernetzung** der verbalen und symbolischen Darstellungen zentral. Das **Verständnis von Variablen** und ihrer Bedeutung wird benötigt, um die Variable(n) sinnvoll zu wählen. Für das Aufstellen der beiden Seiten der Gleichung ist ein tiefgehendes Verständnis von **Termstrukturen** nötig.

Fördermaterial

Aufgabe
1. Gleichungen deuten Mit dieser Aufgabe verstehen die Lernenden das Vorgehen beim Aufstellen von Gleichungen und lernen es zu beschreiben. Hier sind die Grundlagen des Variablenverständnisses und des Verständnisses von Termstrukturen nötig. Wenn Ihre Lernenden Schwierigkeiten bei dieser Aufgabe haben, kann es helfen, diese Grundlagen gezielt zu reaktivieren.
2. Gleichungen aufstellen In dieser Aufgabe stellen Lernende einfache Gleichungen selbstständig auf und können den Unterschied zwischen Gleichungen und Termen herausarbeiten. Wichtig ist, dass die Lernenden eine genaue Vorstellung von der Variablen bekommen und die wesentlichen Unterschiede zwischen Termen und Gleichungen selbstständig erarbeiten können.
3. Stromtarife vergleichen Lernende stellen in dieser Aufgabe einfache Terme und Gleichungen selbstständig auf und lösen diese. Die Begriffe, die die Bestandteile der Stromtarife bezeichnen, können für Lernende unbekannt sein und eine sprachliche Hürde darstellen. Es kann hilfreich sein, die Begriffe vorab mit der Klasse zu klären.
4. Wann Terme? Wann Gleichungen? In dieser Aufgabe lernen Lernende, den Unterschied zwischen Termen und Gleichungen nachvollziehen und Terme bzw. Gleichungen passend zu Situationen auszuwählen.
5. Ein Besuch im Zoo In dieser Aufgabe stellen Lernende Terme und Gleichungen selbstständig auf und lösen sie, um Probleme zu bewältigen. Zur Bearbeitung dieser Aufgabe werden die Formeln für den Flächeninhalt und Umfang einfacher zweidimensionaler Figuren (Rechteck und Dreieck) benötigt. Ggf. müssen diese im Vorfeld wieder aufgefrischt werden.

6 Literatur

- Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen.* Springer Spektrum.
- Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *Mathematik Lehren*, *169*, 2–7.
- Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2017). Strukturen als Basis der Algebra. *Mathematik Lehren, 202,* 2– 8.
- Barzel, B. & Hußmann, S. (2008). Schlüssel zu Variable, Term und Formel. In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan & A. Fischer (Hrsg.), *Entwicklung des algebraischen Denkens. Festschrift zum 60. Geburtstag von Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 6–17). Franzbecker.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2013). *Mathewerkstatt 6.* Cornelsen.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2014). *Mathewerkstatt 7.* Cornelsen.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Mathewerkstatt 8.* Cornelsen.
- Blomberg, J. (2016). *Aufbau eines nachhaltigen Term- und Variablenkonzepts. Ergänzungen zum* schulinternen *Lehrplan G8*. QUA-LiS NRW.
- Blomberg, J. & Marxer, M. (2017). Wie aus Zahlen Variablen werden. Oder: Verstehen, wie man verallgemeinert. *Mathematik Lehren*, (202), 14–19.
- Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R., & Köller, O. (2010). *Bildungsstandards Mathematik: konkret.* Sekundarstufe *I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen.
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L., & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, *52*(33), 1–7.
- Leuders, T. (2012). Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In W. Blum (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen* (6., S. 81–95). Cornelsen.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg. Wiesbaden.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213–234). Beltz.
- Prediger, S., Barzel, B. , Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren*, 164, 2–9.
- Vollrath, H.J., Weigand, H.G. (2009). *Algebra in der Sekundarstufe. (*3. Aufl.). Spektrum.
- Zwetzschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen: Entwicklung und Beforschung eines* diagnosegeleiteten *Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse*. Springer.