

# Handreichung zum SMART-Check

## Lineare Gleichungen aufstellen

Katrin Klingbeil, Fabian Rösken & Bärbel Barzel

Juni 2023



Dieses Material wurde von Katrin Klingbeil, Fabian Rösken & Bärbel Barzel auf der Grundlage von SMART-Tests ([smart.dzlm.de](http://smart.dzlm.de), [smartvic.com](http://smartvic.com)) entwickelt. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

**Zitierbar als**

Klingbeil, K., Rösken, A. & Barzel, B. (2023). Lineare Gleichungen aufstellen – Handreichung zum SMART-Check. Open Educational Resources.

**Projektherkunft**

Dieser Diagnose- und Förderbaustein wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet (gemeinsam von den Ländern finanziert).

**Hinweis zu  
verwandtem Material**

Förder- und Diagnosematerial zu diesen Themen:

- (1) SMART-Check: Lineare Gleichungen aufstellen – A
- (2) SMART-Check: Lineare Gleichungen aufstellen – B
- (3) Erklärvideo Einführung von Gleichungen
- (4) Erklärvideo Gleichungen aufstellen
- (5) Fördermaterial zur Bedeutung von Variablen
- (6) Fördermaterial Terme zu Sachsituationen aufstellen
- (7) Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen
- (8) Fördermaterial Gleichungen aufstellen

# 1 Diagnose mit dem SMART-Check

## SMART-Check: Lineare Gleichungen lösen

ab Jahrgang 7

### Ziel:

Dieser Test überprüft die Fähigkeit, eine lineare Gleichung aus Informationen aufzustellen, die in einem Diagramm oder einer Situationsbeschreibung gegeben sind. Die Situationen erfordern alle das Addieren von Termen wie  $x$ ,  $3x$ ,  $67$  oder  $x + 12$ .

Es werden keine komplexen Gleichungen mit Klammern oder algebraischen Brüchen usw. behandelt, sodass der Umfang der überprüften Gleichungsarten begrenzt ist.

Das Aufstellen von Gleichungen und das anschließende Lösen dieser Gleichungen ist ein zentraler Bestandteil der Anwendung von Algebra und nimmt zurecht einen großen Teil des Algebra-Lehrplans ein. Es ist wichtig, dass die Schüler:innen sowohl das Formulieren als auch das Lösen von Gleichungen lernen. Im Allgemeinen erfordert das Formulieren einer Gleichung ein höheres mathematisches Verständnis der dargestellten Situation als das Lösen einer Gleichung.

Es lassen sich hier drei Verstehensstufen 0, 1 und 2 unterscheiden, die durch den Diagnosetest sichtbar gemacht werden können.

Zusätzlich werden ggf. vorhandene Fehlvorstellungen diagnostiziert.

Der Check liegt in zwei Varianten (A und B) vor, sodass ein Einsatz als Vor- und Nachtest möglich ist.

### Übersicht Verstehensstufen und Fehlvorstellungen:

- Stufe 0** Diese Schüler:innen befinden sich noch unterhalb der Stufe 1. Sie sind noch nicht in der Lage, die richtige Gleichung zur Beschreibung einer Situation auszuwählen.
  - Stufe 1** Diese Schüler:innen können die richtige lineare Gleichung für eine additive Situation auswählen, bei der nur Zahlenterme oder Terme mit einer Variablen vorkommen.
  - Stufe 2** Diese Schüler:innen können außerdem die richtige lineare Gleichung für eine komplexere Situation auswählen, bei der jeder Teilterm zunächst in Bezug auf eine Variable formuliert werden muss.
- 
- ADC** **Additiver Charakter** – Diese Schüler:innen verstehen, dass die Teilterme der Gleichung addiert werden müssen, verwenden aber neue Variablen für diese Teilterme anstelle der vorgesehenen.
  - ARP** **Arithmetischer Prozess** – Diese Schüler:innen wählen anstelle der Gleichung, welche die beschriebene Situation darstellt, eine Gleichung aus, welche das arithmetische Verfahren darstellt, das zur richtigen Lösung führt.

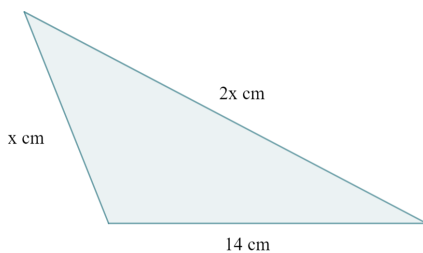
- VAE** **Variable als Einheit** – Diese Schüler:innen schreiben das arithmetische Vorgehen auf, das sie für die Lösung als notwendig erachten, und verwenden dabei die Variable, als ob sie die Maßeinheit wäre.
- AEN** **Änderung** – Diese Schüler:innen konzentrieren sich auf die Art und Weise, in der sich jeder Teilterm von der Referenzgröße unterscheidet, und nicht auf den Teilterm selbst.
- FRT** **Fehlender Referenzterm** – Diese Schüler:innen formulieren die Teilterme in Bezug auf den Referenzterm korrekt, lassen aber den Referenzterm selbst in der Gleichung aus.

## Musterlösung mit Diagnosehinweisen

### Check Version A

#### 1

- a) Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 44 cm. Du sollst den Wert von  $x$  algebraisch berechnen.



Wird keine der Aufgaben 1 a) + b) richtig beantwortet, wird **Stufe 0** erreicht.

Wird mindestens eine der Aufgaben 1 a) + b) richtig beantwortet, wird **Stufe 1 oder höher** erreicht.

Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

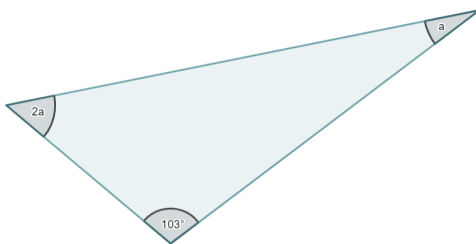
$44x - 14x = 30$  → VAE

$x = \frac{44 - 14}{3}$  → ARP

$x + 2x + 14 = 44$

$x + y + z = 44$  → ADC

- b) Die Winkel in diesem Dreieck addieren sich zu 180 Grad. Du sollst den Winkel  $a$  algebraisch berechnen.



Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

$a + b + c = 180$  → ADC

$a + 2a + 103 = 180$

$a = \frac{180 - 103}{3}$  → ARP

$180a - 103a = 77$  → VAE

## 2 Ein Busunternehmen transportierte Personen auf einer 3-tägigen Reise.

Die zurückgelegte Strecke an Tag 2 war 85 km länger als an Tag 1.  
Die zurückgelegte Strecke an Tag 3 war 125 km länger als an Tag 1.  
Die Gesamtstrecke betrug 1410 km.



Wird außerdem von Aufgabe 2 und 3 mindestens eine falsch beantwortet, wird **Stufe 1** erreicht.

Werden Aufgabe 2 und 3 beide richtig beantwortet (zusätzlich zu mindestens einer richtigen Antwort in Aufgabe 1), wird **Stufe 2** erreicht.

Du sollst algebraisch berechnen, welche Strecke der Bus an Tag 1 zurückgelegt hat. Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

$x + 85 + x + 125 = 1410$  → AEN

$x + (x + 85) + (x + 125) = 1410$

$x + 85 + 125 = 1410$  → FRT

$x = \frac{1410 - 85 - 125}{3}$  → ARP

## 3 Drei Freunde sammeln Comic-Hefte.

Jonathan besitzt dreimal so viele wie Benjamin.  
Merve besitzt 10 weniger als Benjamin.  
Zusammen besitzen die drei 100 Comic-Hefte.

Du sollst algebraisch berechnen, wie viele Comic-Hefte Benjamin besitzt. Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

$3x - 10 = 100$  → AEN

$3x + (x - 10) = 100$  → FRT

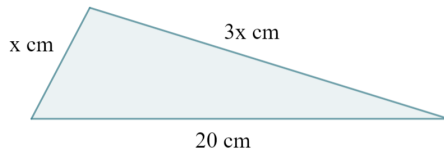
$x = \frac{100 + 10}{5}$  → ARP

$x + 3x + (x - 10) = 100$

## Check Version B

1

- a) Der Umfang dieses Dreiecks beträgt 44 cm.  
Du sollst den Wert von  $x$  algebraisch berechnen.



Wird keine der Aufgaben 1 a) + b) richtig beantwortet, wird **Stufe 0** erreicht.

Wird mindestens eine der Aufgaben 1 a) + b) richtig beantwortet, wird **Stufe 1 oder höher** erreicht.

Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

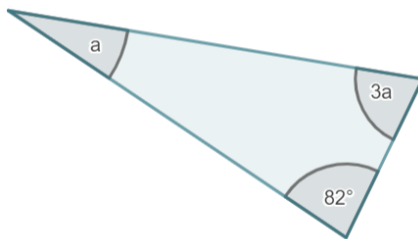
$44x - 20x = 24$  → VAE

$x = \frac{44 - 20}{4}$  → ARP

$x + 3x + 20 = 44$

$x + y + z = 44$  → ADC

- b) Die Winkel in diesem Dreieck addieren sich zu  $180^\circ$ .  
Du sollst den Winkel  $a$  algebraisch berechnen.



Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

$a + b + c = 180$  → ADC

$a + 3a + 82 = 180$

$a = \frac{180 - 82}{4}$  → ARP

$180a - 82a = 98$  → VAE

2

- Ein paar Freunde sind auf eine 3-tägige Wanderung gegangen.  
Die zurückgelegte Strecke an Tag 2 war 12 km länger als an Tag 1.  
Die zurückgelegte Strecke an Tag 3 war 5 km länger als an Tag 1.  
Die Gesamtstrecke betrug 77 km.



Wird außerdem von Aufgabe 2 und 3 mindestens eine *falsch* beantwortet, wird **Stufe 1** erreicht.

Werden Aufgabe 2 und 3 beide richtig beantwortet (zusätzlich zu mindestens einer richtigen Antwort in Aufgabe 1), wird **Stufe 2** erreicht.

Du sollst algebraisch berechnen, welche Strecke die Freunde an Tag 1 zurückgelegt haben.  
Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

$x + 12 + x + 5 = 77$  → AEN

$x + (x + 12) + (x + 5) = 77$

$x + 12 + 5 = 77$  → FRT

$x = \frac{77 - 12 - 5}{3}$  → ARP

### 3 Drei Freunde sammeln Comichefte.

Taylan besitzt viermal so viele wie Bastian.  
Marissa besitzt 9 weniger als Bastian.  
Zusammen besitzen die drei 111 Comichefte.

Du sollst algebraisch berechnen, wie viele Comichefte Bastian besitzt.  
Mit welcher Gleichung würdest du beginnen? Kreuze an.

$4x - 9 = 111$  → AEN

$4x + (x - 9) = 111$  → FRT

$x = \frac{111 + 9}{6}$  → ARP

$x + 4x + (x - 9) = 111$

## 2 Förderhinweise

Das Lösen von Gleichungen ist ein sehr wichtiger Teil des Mathematikunterrichts. Es ist wichtig, dass alle Schüler:innen ein gewisses Verständnis dafür haben, wozu es dient und wie es gemacht wird. Diese Fähigkeit ist jedoch nicht nützlich, wenn die Schüler:innen nicht in der Lage sind, die Gleichungen aufzustellen, welche zum Lösen eines Problems benötigt werden. Um die Schüler:innen beim Aufstellen von Gleichungen zu unterstützen, muss dies regelmäßig mit Standard-Wortproblemen und anderen Arten, in denen eine Gleichung oder eine allgemeine Beschreibung auftreten kann, geübt werden. Sie müssen ermutigt werden, Skizzen zu zeichnen und mit Zahlen auszuprobieren, damit sie aktiv die mathematischen Beziehungen aufdecken, die jeder Situation innewohnen.

Zum Beispiel: „Überprüfe diese Gleichungen, führe das Zahlenmuster fort, drücke es algebraisch aus und beweise, dass dein Zahlenmuster immer funktioniert.

$1 \cdot 3 + 1 = 2 \cdot 2$ ;  $2 \cdot 4 + 1 = 3 \cdot 3$ ;  $3 \cdot 5 + 1 = 4 \cdot 4$ ; ...“

### Stufe 0

Diese Schüler:innen sind noch nicht in der Lage, die richtige Gleichung zur Beschreibung einer Situation auszuwählen.

Diese Schüler:innen müssen verstehen, dass in der Algebra Variablen verwendet werden, um zu beschreiben, was mit Zahlen getan wird. Wenn zum Beispiel in der ersten Situation, in der es um den Umfang geht, die Seiten 5 cm, 10 cm und 24 cm lang wären, würden diese Längen addiert, um den Umfang zu erhalten. Das gleiche würde passieren, wenn sie 6 cm, 12 cm und 24 cm wären. Das sagt uns, dass wir eine Gleichung schreiben müssen, in der die Längen addiert werden, obwohl es Variablen gibt, die für die Längen stehen.

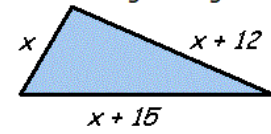
Passendes Material:

- Fördermaterial zur Bedeutung von Variablen (Aufgabe 4)
- Fördermaterial Terme zu Sachsituationen aufstellen (Aufgabe 1 und 3)
- Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen (Aufgabe 3)
- Fördermaterial Gleichungen aufstellen (Aufgabe 1 und 2)
- Erklärvideo Einführung von Gleichungen
- Erklärvideo Gleichungen aufstellen

## Stufe 1

Diese Schüler:innen können die richtige lineare Gleichung wählen, wenn alle Komponenten als numerische oder algebraische Ausdrücke gegeben sind. Zum Beispiel können sie die Gleichung  $x + (x + 12) + 3x = 60$  wählen, um die Situation im Bild zu beschreiben und sie wissen, dass die Lösung dieser Gleichung es ermöglicht, den Wert von  $x$  zu finden.

Der Umfang beträgt 60cm.



$$x + (x+12) + (x+15) = 60$$

Die Schüler:innen auf Stufe 1 können die richtige lineare Gleichung wählen, wenn alle Komponenten aus numerischen oder algebraischen Ausdrücken bestehen. Jetzt müssen sie lernen, Ausdrücke für komplexere Komponenten zu schreiben. Wenn ich z. B. am Montag  $n$  km gelaufen bin und dann am Dienstag 2 km mehr, also insgesamt 10 km an den beiden Tagen, dann müssen die Schüler:innen zunächst in der Lage sein, die Entfernung am Dienstag als  $n + 2$  km auszudrücken. Wenn sie dies beherrschen, müssen sie lernen, diese Terme mit der entsprechenden Operation zu kombinieren, um beispielsweise zu schreiben, dass die an den beiden Tagen gelaufene Gesamtstrecke  $n + (n + 2)$  km betrug. Die Gleichung würde dann  $n + (n + 2) = 10$  lauten.

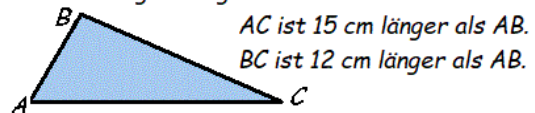
Passendes Material:

- Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen (Aufgabe 3)
- Fördermaterial zu Gleichungen aufstellen (Aufgabe 3 und 5)
- Erklärvideo Gleichungen aufstellen

## Stufe 2

Diese Schüler:innen können die richtige Gleichung wählen, um eine komplexere Situation zu beschreiben, bei der jede der Komponenten zunächst in Bezug zur selben Variable verstanden werden muss. Dies wird durch die Situation im Bild veranschaulicht.

Der Umfang beträgt 60cm.



$$x + (x+12) + (x+15) = 60$$

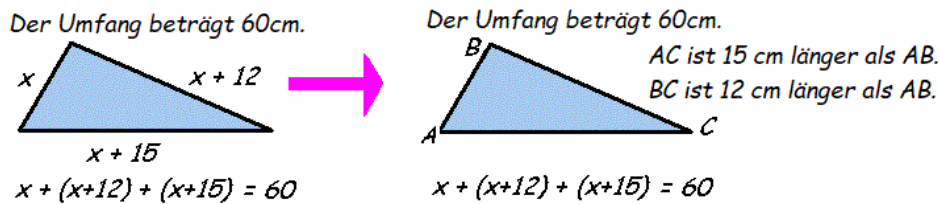
Diese Schüler:innen können Gleichungen in den im Test vorgestellten Kontexten formulieren. Sie könnten nun versuchen, die gleiche Art von Gleichung auch in anderen Kontexten zu formulieren, z. B. „Wenn die Summe von drei aufeinanderfolgenden geraden Zahlen 324 ist, stelle eine Gleichung auf, um die kleinste dieser Zahlen zu finden.“ Sie könnten auch in Kontexte eingeführt werden, in denen es sich bei der Operation nicht um eine Addition handelt, z. B. „Tom hat drei mehr als doppelt so viele Fußballkarten wie Ali, und Sam hat zehn mehr Fußballkarten als Ali. Tom hat drei Karten mehr als Sam. Wie viele Karten hat Ali?“

Passendes Material:

- Fördermaterial Gleichungen aufstellen (Aufgabe 5)
- Erklärvideo Gleichungen aufstellen



## Weitere Details zu Fehlvorstellungen



### ADC – Additiver Charakter

Diese Schüler:innen verstehen, dass die Teilterme der Gleichung addiert werden müssen, verwenden aber neue Variablen für diese Teilterme anstelle der vorgesehenen. Im obigen Beispiel würden sie eine Alternative wie  $x + y + z = 60$  wählen.

### ARP – Arithmetischer Prozess

Diese Schüler:innen wählen nicht die richtige Gleichung, sondern das arithmetische Verfahren, das zur richtigen Lösung führt. Für das oben gezeigte Beispiel wäre dies  $x = (60 - 12 - 15) \div 3$ . Dies liefert zwar die korrekte Lösung für  $x$ , aber die Wahl dieses Verfahrens zeigt, dass diese Schüler:innen wahrscheinlich noch nicht wissen, wie nützlich die algebraische Vorgehensweise zum Lösen von Problemen ist. Es ist wahrscheinlich, dass sie noch nicht verstehen, dass das Aufstellen einer Gleichung, um ein Problem zu lösen, nur fordert, dass sie die Situation beschreiben, nicht aber die Lösung selbst. Dieser Ansatz funktioniert für einfache Probleme, bereitet die Schüler:innen aber nicht darauf vor, Algebra zur Lösung schwierigerer Probleme einzusetzen.

### VAE – Variable als Einheit

Diese Schüler:innen schreiben das arithmetische Vorgehen auf, das sie für die Lösung als notwendig erachten, und verwenden die Variable, als ob sie die Maßeinheit wäre. Im obigen Beispiel könnte dies etwas wie  $15x + 12x = 60$  sein. Wäre die Basis 30 cm und nicht  $x + 15$ , würden sie vielleicht  $30x + 12x = 60$  schreiben. Möglicherweise ist in diesem Fall die Bedeutung von Variablen noch nicht verstanden; dies könnte mithilfe des SMART Check „Bedeutung von Variablen erfassen“ überprüft werden.

### AEN – Änderungen

Diese Schüler:innen konzentrieren sich auf die Art und Weise, in der sich jeder Teilterm von der Referenzgröße unterscheidet, und nicht auf den Teilterm selbst. Im obigen Beispiel, wenn es als Beschreibung und nicht als beschriftetes Diagramm gegeben wird, wäre dies  $x + 12 + 15 = 60$ . Anstatt „12 mehr als die kürzeste Seite“ als „ $x + 12$ “ zu schreiben, würde diese Gruppe von Schülern „+12“ oder „12 mehr“ für diesen Teilterm schreiben.

### FRT – Fehlender Referenzterm

Diese Schüler:innen formulieren die Teilterme in Bezug auf den Referenzterm korrekt, lassen aber den Referenzterm selbst in der Gleichung aus. Das könnte daran liegen, dass sie ihn einfach vergessen, aber das wissen wir noch nicht. Im rechten Beispiel oben würden sie die Gleichung  $x + 12 + x + 15 = 60$  wählen.