

Handreichung zum SMART-Check

Lineare Gleichungen lösen

Katrin Klingbeil, Fabian Rösken & Bärbel Barzel

Juni 2023



Dieses Material wurde von Katrin Klingbeil, Fabian Rösken & Bärbel Barzel auf der Grundlage von SMART-Tests (smart.dzlm.de, smartvic.com) entwickelt. Es kann unter der Creative Commons Lizenz BY-SA (Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen) 4.0 International weiterverwendet werden.

Zitierbar als

Klingbeil, K., Rösken, A. & Barzel, B. (2023). Lineare Gleichungen lösen – Handreichung zum SMART-Check. Open Educational Resources.

Projektherkunft

Dieser Diagnose- und Förderbaustein wurde für das Projekt Mathematik aufholen nach Corona aufbereitet (gemeinsam von den Ländern finanziert).

**Hinweis zu
verwandtem Material**

Förder- und Diagnosematerial zu diesen Themen:

- (1) SMART-Check: Lineare Gleichungen lösen – A
- (2) SMART-Check: Lineare Gleichungen lösen – B
- (3) Erklärvideo Einführung von Gleichungen
- (4) Erklärvideo Gleichungen lösen
- (5) Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen
- (6) Fördermaterial zu „Knack die Box“ (Äquivalenzumformung)

1 Diagnose mit dem SMART-Check

SMART-Check: Lineare Gleichungen lösen

ab Jahrgang 7

Ziel:

Dieser Test testet die Fähigkeit, lineare Gleichungen mit einer Variablen zu lösen, wobei die komplexeste Gleichung folgendem Aufbau folgt: $ax + b = cx + d$ (z. B. $4x + 6 = x + 1$).

Das Formulieren von Gleichungen und das anschließende Lösen dieser Gleichungen ist ein zentraler Bestandteil der Anwendung von Algebra und nimmt zu Recht einen großen Teil des Algebra-Lehrplans ein. Sowohl das Formulieren als auch das Lösen zu lernen ist wichtig. Das Lösen ist für viele Arten von Gleichungen weitgehend Routine, aber wenn gelernt wird, wie die Gleichungen verändert werden können, dann sollte dies auf dem Verständnis aufbauen, dass "auf beiden Seiten das Gleiche tun" die Gleichheit bewahrt.

Es lassen sich hier fünf Verstehensstufen 0, 1, 2, 3 und 4 unterscheiden, die durch den Diagnostetest sichtbar gemacht werden können.

Zusätzlich werden ggf. vorhandene Fehlvorstellungen, typische Fehler und Wissenslücken diagnostiziert.

Der Check liegt in zwei Varianten (A und B) vor, sodass ein Einsatz als Vor- und Nachtest möglich ist.

Übersicht Verstehensstufen und Fehlvorstellungen:

- Stufe 0** Diese Schüler:innen können selbst einfache linearen Gleichungen nicht lösen.
- Stufe 1** Diese Schüler:innen können einfache lineare Gleichungen lösen, welche durch Raten leicht zu lösen sind.
- Stufe 2** Diese Schüler:innen können zudem lineare Gleichungen mit schwierigeren Lösungen lösen, sodass eine systematische Methode wie Rückwärtsarbeiten erforderlich ist.
- Stufe 3** Diese Schüler:innen können zudem lineare Gleichungen mit Variablen auf beiden Seiten und ausschließlich Additionssymbolen lösen, sodass sie durch "Subtraktion des Gleichen von beiden Seiten" gelöst werden müssen.
- Stufe 4** Diese Schüler:innen können zudem lineare Gleichungen mit Variablen auf beiden Seiten lösen, bei denen Konstanten und/oder Koeffizienten negativ sein können, sodass sie durch "dasselbe auf beiden Seiten machen" gelöst werden müssen.
- LAG** **Lösen der Additionsgleichung** – Diese Schüler:innen geben bei einer Gleichung der Form $x - a = b$ die Lösung der zugehörigen Gleichung $x + a = b$ an.
- LUG** **Lösen der umgekehrten Gleichung** – Diese Schüler:innen geben bei einer Gleichung der Form $a - x = b$ die Lösung der zugehörigen Gleichung $x - a = b$ an.
- LKG** **Lösen der klammerlosen Gleichung** – Diese Schüler:innen geben bei einer Gleichung der Form $a(x + b) = c$ die Lösung der zugehörigen Gleichung $ax + b = c$ an.

VEF Vereinfachungsfehler – Diese Schüler:innen sind nicht in der Lage, gleichartige Terme korrekt zusammenzufassen, was ihre Fähigkeit beeinträchtigt, bestimmte Arten von Gleichungen zu lösen.

ABR Algebraische Brüche-Problem – Diese Schüler:innen sind nicht in der Lage, Gleichungen der Form $\frac{x}{a} + b = c$ und/oder $\frac{(x+a)}{b} = c$ zu lösen.

Musterlösung mit Diagnosehinweisen

Check Version A

- 1** Löse die folgenden Gleichungen im Heft oder auf einem extra Blatt Papier. Schreibe deine Lösung in das dafür vorgesehen Feld. Du darfst einen Taschenrechner benutzen.

- 1.1**
- | | | | |
|----|---------------|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) | $3a + 8 = 23$ | $a = 5$ | a) + b) Um Stufe 1 oder höher zu erreichen, muss mindestens eine dieser beiden Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 0) |
| b) | $4a + 9 = 37$ | $a = 7$ | |
| c) | $5a + 7 = 15$ | $a = \frac{8}{5} = 1,6$ | c) + d) Um Stufe 2 oder höher zu erreichen, muss <i>zusätzlich</i> mindestens eine dieser beiden Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 1). |
| d) | $8a + 3 = 16$ | $a = \frac{13}{8} = 1,625$ | |
- 1.2**
- | | | | |
|----|---------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) | $8a + 5 = 3a + 14$ | $a = \frac{9}{5} = 1,8$ | a) + b) Um Stufe 3 oder höher zu erreichen, muss <i>zusätzlich</i> mindestens eine dieser beiden Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 2). |
| b) | $12a + 2 = 8a + 15$ | $a = \frac{13}{4} = 3,25$ | |
| c) | $7a - 11 = 2a - 4$ | $a = \frac{7}{5} = 1,4$ | c) + d) Um Stufe 4 zu erreichen, müssen <i>zusätzlich</i> diese <u>beiden</u> Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 3). |
| d) | $12 - 11a = 5 - a$ | $a = \frac{7}{10} = 0,7$ | |

Die folgenden Aufgaben spielen für die Stufe keine Rolle, sondern dienen ausschließlich der Diagnose möglicher Fehlvorstellungen, typischer Fehler und Wissenslücken.

- 1.3**
- | | | | |
|----|-----------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| a) | $7a - 2 = 16$ | $a = \frac{18}{7}$ | $a = 2 \rightarrow$ LAG
$a = -2 \rightarrow$ LUG |
| b) | $14 - 2a = 8$ | $a = 3$ | $a = -3 \rightarrow$ LAG
$a = 11 \rightarrow$ LUG |
| c) | $3a + 6 + 2a = 7$ | $a = \frac{1}{5} = 0,2$ | $a \neq \frac{1}{5} \rightarrow$ VEF |
| d) | $\frac{a+2}{5} = 3$ | $a = 13$ | $a = \frac{1}{5} \rightarrow$ ABR |
| e) | $\frac{a}{3} + 1 = 5$ | $a = 12$ | $a = 14 \rightarrow$ ABR |
| f) | $4(a-3) = 21$ | $a = \frac{33}{4} = 8,25$ | $a = 6 \rightarrow$ LKG |

Check Version B

- 1** Löse die folgenden Gleichungen im Heft oder auf einem extra Blatt Papier.
Schreibe deine Lösung in das dafür vorgesehen Feld.
Du darfst einen Taschenrechner benutzen.

- 1.1**
- | | | | |
|----|----------------|----------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) | $4n + 11 = 23$ | $n = 3$ | a) +b) Um Stufe 1 oder höher zu erreichen, muss mindestens eine dieser beiden Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 0) |
| b) | $3n + 5 = 26$ | $n = 7$ | |
| c) | $8n + 3 = 16$ | $n = \frac{13}{8} = 1,625$ | c) + d) Um Stufe 2 oder höher zu erreichen, muss <i>zusätzlich</i> mindestens eine dieser beiden Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 1). |
| d) | $5n + 7 = 15$ | $n = \frac{8}{5} = 1,6$ | |
- 1.2**
- | | | | |
|----|---------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| a) | $11n + 3 = 7n + 16$ | $n = \frac{13}{4} = 3,25$ | a) + b) Um Stufe 3 oder höher zu erreichen, muss <i>zusätzlich</i> mindestens eine dieser beiden Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 2). |
| b) | $9n + 3 = 4n + 12$ | $n = \frac{9}{5} = 1,8$ | |
| c) | $7n - 11 = 2n - 4$ | $n = \frac{7}{5} = 1,4$ | c) + d) Um Stufe 4 zu erreichen, müssen <i>zusätzlich</i> diese <u>beiden</u> Aufgaben korrekt gelöst sein (ansonsten: Stufe 3). |
| d) | $12 - 11n = 5 - n$ | $n = \frac{7}{10} = 0,7$ | |
- d) $n = -\frac{7}{10} \rightarrow$ **LAG**

Die folgenden Aufgaben spielen für die Stufe keine Rolle, sondern dienen ausschließlich der Diagnose möglicher Fehlvorstellungen, typischer Fehler und Wissenslücken.

- 1.3**
- | | | | |
|----|-----------------------|--------------------------|--------------------------------------------------------------------|
| a) | $5n - 1 = 16$ | $n = \frac{17}{5}$ | $n = 3 \rightarrow$ LAG
$n = -3 \rightarrow$ LUG |
| b) | $15 - 2n = 9$ | $n = 3$ | $n = -3 \rightarrow$ LAG
$n = 12 \rightarrow$ LUG |
| c) | $2n + 4 + 3n = 5$ | $n = \frac{1}{5} = 0,2$ | $n \neq \frac{1}{5} \rightarrow$ VEF |
| d) | $\frac{n+1}{5} = 3$ | $n = 14$ | $n = 10 \rightarrow$ ABR |
| e) | $\frac{n}{4} + 3 = 8$ | $n = 20$ | $n = 29 \rightarrow$ ABR |
| f) | $5(n - 2) = 8$ | $n = \frac{18}{5} = 3,6$ | $n = 2 \rightarrow$ LKG |

2 Förderhinweise

Grundsätzliches

Bevor mit dem Lösen von Gleichungen begonnen wird, sollte viel Zeit auf die Bedeutung von Variablen, das Interpretieren und selbstständige Aufstellen von Termen und Gleichungen sowie die Gleichheit von Termen verwendet werden, um eine solide Verstehensgrundlage zu gewährleisten und möglichen Fehlern, die auf mangelndem Verständnis beruhen, vorzubeugen. Dazu können die weiteren Materialien aus dem MaCo-Algebra-Modul verwendet werden.

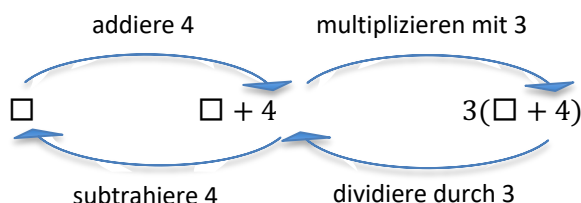
Stufe 0

Diese Schüler:innen können selbst die einfachen linearen Gleichungen nicht lösen. Eine der häufigsten Fehlerquellen tritt bei Gleichungen wie $ax = b$ auf, wenn Schüler:innen a von b subtrahieren, anstatt zu dividieren. Dies ist manchmal darauf zurückzuführen, dass Schüler:innen $3x$ als $3 + x$ interpretieren. Oder es kann ein naiver Versuch sein, das a "loszuwerden", indem man es "wegnimmt", d. h. subtrahiert. Eine weitere Fehlerquelle ergibt sich, wenn nur der erste (numerische) Schritt durchgeführt wird, z. B. wird für $ax + b = c$ die Lösung $c - b$ gegeben.

Diesen Schüler:innen kann es möglicherweise helfen, statt Buchstaben-Variablen noch einmal zu leeren Kästchen zurückzugehen. Anhand von einfachen Gleichungen mit fehlenden Zahlen (Kästchen) können dann schrittweise verschiedene Strategien erprobt und entwickelt werden: „Rückgriff auf Faktenwissen“ (z. B. bei $50 + \square = 80$, weiß man einfach, dass $50 + 30 = 80$ ist), „Raten, Überprüfen & Verbessern“ und „Rückwärtsarbeiten“.

Bei Gleichungen wie $4 + \square = 6 + 13$ sollte man thematisieren, dass es nicht nur die Möglichkeit gibt, zuerst die rechte Seite auszurechnen und dann von dort aus die fehlende Zahl zu berechnen, sondern man auch die Vorstellung des Ausbalancierens nutzen kann („Damit beide Seiten gleich sind, brauche ich eine Zahl, die 2 größer ist als 13, also 15.“). Dies fördert das relationale Denken und damit ein umfassendes Verständnis des Gleichheitszeichens.

Um das Rückwärtsarbeiten zu unterstützen, können Pfeilbilder hilfreich sein, bei denen dann anschließend die einzelnen Pfeile wieder rückgängig gemacht werden:



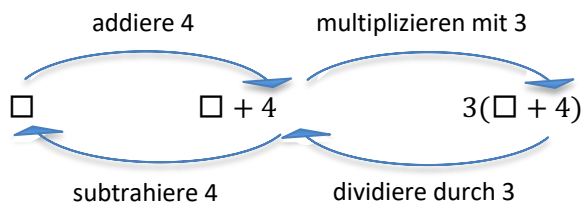
Passendes Material:

- Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen (Aufgabe 2 und 4)
- Erklärvideo Einführung von Gleichungen

Stufe 1

Diese Schüler:innen können einfache lineare Gleichungen lösen, welche durch Raten gelöst werden können. Obwohl eine raffinierte "Raten, Prüfen und Verbessern"-Strategie bei manchen Aufgaben verwendet werden kann, um numerische Lösungen für eine Gleichung zu finden, ist es unwahrscheinlich, dass Schüler:innen der Stufe 1 beim Raten und Prüfen andere als ganze Zahlen verwenden, sodass die Gleichungen, die sie lösen können, im Allgemeinen positive ganzzahlige Lösungen haben werden. Ein Beispiel ist die Gleichung $3x + 11 = 32$, deren Lösung 7 ist.

Die Schüler:innen auf Stufe 1 profitieren von Aufgaben, bei denen sie die Strategie des „Rückwärtsarbeiten“ kennenlernen und anwenden. Dazu können Pfeilbilder genutzt werden, bei denen dann anschließend die einzelnen Pfeile wieder rückgängig gemacht werden:



Darüber hinaus kann auch bereits die Strategie „auf beiden Seiten das Gleiche tun“ angeregt werden (siehe Hinweise zu Stufe 2).

Passendes Material:

- Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen (Aufgabe 1, 2 und 4)
- Fördermaterial zu „Knack die Box“ (Äquivalenzumformung) (Aufgabe 1, 2 und 4)
- Erklärvideo Einführung von Gleichungen
- Erklärvideo Gleichungen lösen

Stufe 2

Diese Schüler:innen können auch lineare Gleichungen lösen, bei denen es unwahrscheinlich ist, dass durch Raten und Prüfen die Lösung gefunden wird, sodass wahrscheinlich eine systematische Methode wie Rückwärtsarbeiten verwendet wurde. Ein Beispiel ist die Gleichung $3x + 11 = 31$, deren Lösung $\frac{20}{3}$ ist.

Diese Schüler:innen sind bereit zu lernen, lineare Gleichungen mit Variablen auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens zu lösen. Diese erfordern die Strategie "auf beiden Seiten das Gleiche tun" (z. B. $5x + 4 = 2x + 9$ und $5x + 4 = 2x - 9$). Die Beispiele sollten sowohl die Subtraktion als auch die Addition beinhalten. Eine wichtige Beobachtung ist, dass das sehr nützliche Verfahren "auf beiden Seiten das Gleiche tun" sich konzeptuell von anderen Gleichungslösungsmethoden unterscheidet, weil sie nicht nur eine Operation auf eine Zahl, sondern auf eine ganze Gleichung erfordert. Mit dem Verfahren "auf beiden Seiten das Gleiche tun" wird eine Gleichung zu einer anderen Gleichung mit der/den gleichen Lösung(en) umgewandelt, bis man zu einer besonders einfachen Gleichung (z. B. $x = 4$) gelangt. Dies unterscheidet sich zu anderen Prozessen, bei denen Zahlen verändert werden. Um die Strategie „auf beiden Seiten das Gleiche tun“ zu verstehen, ist insbesondere das Waage-Modell hilfreich.

Passendes Material:

- Fördermaterial zur Einführung von Gleichungen (Aufgabe 1 und 4)
- Fördermaterial zu „Knack die Box“ (Äquivalenzumformung) (Aufgabe 1, 2 und 4)
- Erklärvideo Gleichungen lösen

Stufe 3

Diese Schüler:innen können Gleichungen mit Variablen auf beiden Seiten lösen, allerdings nur wenn es sich um Additionsaufgaben handelt. Diese müssen durch "Subtraktion des Gleichen von beiden Seiten" gelöst werden. Sie können nicht durch "Rückwärtsarbeiten" gelöst werden, da das Pfeilbild nicht entsprechend konstruiert werden kann. Ein Beispiel ist die Gleichung $3x + 11 = x + 7$.

Diese Schüler:innen sind bereit zu lernen, lineare Gleichungen zu lösen, die sowohl Addition als auch Subtraktion beinhalten (z. B. $5x + 11 = 2x - 4$ und $5x + 11 = 4 - 2x$). Beispiele sollten Gleichungen beinhalten, bei denen das x nach der Konstanten erscheint, sowohl mit Addition als auch mit Subtraktion.

Passendes Material:

- Fördermaterial zu „Knack die Box“ (Äquivalenzumformung) (Aufgabe 3)
- Erklärvideo Gleichungen lösen

Stufe 4

Diese Schüler:innen können lineare Gleichungen mit Variablen auf beiden Seiten lösen, die sowohl Addition als auch Subtraktion beinhalten. Diese müssen gelöst werden, indem sie "auf beiden Seiten das Gleiche tun". Die Schüler:innen müssen an und mit der Unbekannten arbeiten und nicht nur mit Zahlen. Ein Beispiel ist die Gleichung $3x + 11 = 20 - x$.

Diese Schüler:innen sind bereit zu lernen, lineare Gleichungen zu lösen, die Parameter beinhalten (z. B. $3x + 11 = 39 - mx$, gelöst für x) und lineare Gleichungen mit einer größeren Vielfalt an Syntax und Operationen (Klammern, algebraische Brüche und Division, größere Komplexität auf beiden Seiten). Später werden sie auch lernen, andere Arten von Gleichungen zu lösen.