

Steckbrief zum Baustein Algebra (Sekundarstufe) des Fortbildungsmoduls Diagnose und Förderung von Verstehensgrundlagen

Bärbel Barzel, Tobias Domokos, Anika Dreher, Marita Friesen,
Lars Holzäpfel, Macarena Larrain, Lukas Weith



Grundidee des Bausteins

Algebraunterricht in der Schule und in Schulbüchern zeigt häufig eine zu starke Kalkülorientierung, die nicht mit dem Verstehen der dahinterliegenden Strukturen und Verfahren verbunden ist. Dieser Fortbildungsbaustein stellt die Verstehensgrundlagen in den Bereichen Variable, Terme und Gleichungen dar und zeigt dann Möglichkeiten zur Diagnose von Fehlvorstellungen auf. Anschließend werden Fördermöglichkeiten zum Aufbau eines tiefergehenden Verständnisses anhand von vielfältigen Wegen mit unterschiedlichen Modellen und Medien präsentiert.

Zielgruppe und Ziele

Mathematik-Lehrkräfte und -Förderkräfte der Sekundarstufe mit/ohne fachdidaktische Vorkenntnisse ...

- benennen die wichtigsten Grundvorstellungen und Verstehensgrundlagen zu Variablen, Termen und Gleichungen,
- identifizieren, welche dieser Vorstellungen in einer Aufgabe bzw. einer Lernendenaussage relevant sind,
- setzen die angebotenen Diagnose-Materialien ein, um Fehlvorstellungen der Lernenden zum Thema Algebra offenzulegen,
- nutzen das vorgestellte Fördermaterial zum Aufbau eines inhaltlichen Verständnisses der Algebra bei den Lernenden.

Hintergrund

Die in der Algebra benötigten Verstehensgrundlagen sind sehr umfangreich und vielschichtig. Gleichzeitig werden sie in vielen Schulbüchern nicht ausführlich genug behandelt. Deshalb wird in diesem Baustein versucht, den Lehrkräften die wichtigsten Grundvorstellungen kompakt zu präsentieren:

- Verschiedene Rollen und Aspekte von Variablen
- Verschiedene Zugänge zu Termgleichheit
- Bedeutungen des Gleichheitszeichens

Wenn diese Vorstellungen effektiv gefördert werden, entwickeln Lernende ein algebraisches Verständnis, mit dem verschiedenste Fehlvorstellungen vermieden werden können.

Struktur und Kernaktivitäten

Das Thema in zwei Bausteine aufgeteilt: 1) Variable und Terme, 2) Gleichungen.

Baustein 1 beginnt mit einer kurzen, einstimmenden Aktivität. Anschließend *identifizieren* die Lehrkräfte zunächst zu Variablen und anschließend zu Termen die zentrale Grundvorstellungen, lernen Möglichkeiten kennen, wie dieses Verständnis bei Lernenden *diagnostiziert* (z. B. SMART-Test) und *gefördert* (z. B. Computeralgebra) werden kann. Abschließend folgt eine umfangreiche Aktivität („Aufgaben-Dossier“), in der verständnisfördernde Aufgaben detailliert betrachtet werden.

In Baustein 2 werden Grundvorstellungen zum Gleichheitszeichen identifiziert und häufige Fehlvorstellungen beim Aufstellen und Lösen von Gleichungen diagnostiziert. Die Lehrkräfte vergleichen verschiedene Modelle, mit denen das Verständnis von Äquivalenzumformungen gefördert werden soll. Eine zentrale Rolle spielen dabei vielfältige Darstellungsformen und ihre Vernetzung sowie der Wechsel zwischen ihnen.

Verfügbares Material

Präsentation mit integrierten Aktivitäten und Videos:

- DZLM_DiFsek_Algebra_Folien_Teil1
- DZLM_DiFsek_Algebra_Folien_Teil2

Material für die Arbeitsphasen:

- DZLM_DiFSek_Algebra_Teil1_AM1_Punktmuster
- DZLM_DiFSek_Algebra_Teil1_AM2_Variablenrollen
- DZLM_DiFSek_Algebra_Teil1_AM3_Tabelle_Grundvorstellungen
- DZLM_DiFSek_Algebra_Teil1_AM4_Dossier
- DZLM_DiFSek_Algebra_Teil2_AM1_Gleichheitszeichen.docx
- DZLM_DiFSek_Algebra_Teil2_AM2_Fehler.docx

Beispiel mögliche Zeitstruktur für zwei 3 Stunden-Blöcke zzgl. Pausen (viele andere Zeitstrukturen möglich!)

Zeit	Inhalt / Aktivität	Material / Medien
1 Phase: Einstieg (ca. 31 min)		
3 min	▪ Einstimmung: Algebra – Variable und Terme	1 Folie
10 min	▪ Aktivität 1, Einstiegsfrage A: Aufg. „Punktmuster“ analysieren	1 Folie, AM1_Punktmuster
15 min	▪ Aktivität 1, Einstiegsfrage B: Lernendenlösungen analysieren	4 Folien, AM1_Punktmuster
3 min	▪ Input: Verstehensgrundlagen / Prinzipien	1 Folie
2. Phase: Variable verstehen und nutzen: Worauf kommt es an? (ca. 25 min)		
15 min	▪ Aktivität 2: Variablenrollen identifizieren	1 Folie + AM2_Variablenrollen
10 min	▪ Input: Grundvorstellungen zu Variablen, Variablenaspekte	2 Folien + AM3_Tabelle_Grundvorstellungen
3. Phase: Variable verstehen und nutzen: Wie diagnostizieren und fördern wir? (ca. 9 min)		
2 min	▪ Input: Diagnose von Fehlervorstellungen - SMART-Tests	2 Folien
	▪ Input: Gegenstandsaspekt – Situationen algebraisch beschreiben	1 Folie
1 min	▪ Aktivität 3: Murmelfase: Variablen verstehen – Typische Schwierigkeiten und Fehler	2 Folien
4 min	▪ Erklär- oder Themenvideo	1 Folie (<i>Video noch in Vorb.</i>)
2 min	▪ Übersicht: Variablenverständnis – ab wann fördern?	1 Folie
4. Phase Terme verstehen, aufstellen und nutzen – Worauf kommt es an? (ca. 35 min)		
5 min	▪ Input: Ein Term für viele (strukturgleiche) Situationen	1 Folie
20 min	▪ Eine Situation – viele Terme	2 Folien + Tafel/Padlet
	▪ Aktivität 4: Aufgabe „Streichhölzer“ analysieren	
2 min	▪ Verstehensgrundlagen beim Aufstellen von linearen Termen	1 Folie
8 min	▪ Gleiche Situationen mit unterschiedlichen Termen beschreiben	3 Folien
5 min	▪ Verschiedene Darstellungsformen und Darstellungsvernetzung	4 Folien
5. Phase Terme verstehen, aufstellen und nutzen – Wie diagnostizieren wir? (ca. 15 min)		
7 min	▪ Diagnoseaktivität 5A - Murmelfase: Schwierigkeiten beim Aufstellen von Termen	3 Folien
8min	▪ Diagnoseaktivität 5B - Murmelfase: Schwierigkeiten beim Umformen von Termen	6 Folien
6. Phase Terme verstehen, aufstellen und nutzen – Wie fördern wir? (ca.15 min)		
15 min	▪ Aktivität 6 - Murmelfase: Aufbau von Zahlentermen nutzen	2 Folien
	▪ Input: Übergang von Arithmetik zu Algebra, Darstellungen nutzen, Einbettung in sinnstiftenden Kontext, Aufstellen von Termen in Tabellenkalkulation	9 Folien
	▪ Übersicht: Termverständnis – Ab wann fördern?	1 Folie
7. Phase: Aufgaben-Dossier (ca. 40 min)		
10 min	▪ Aktivität 6A: Aufgabe „Aufgaben-Dossier“ analysieren	15 Folien, AM4_Dossier
30 min	▪ Aktivität 6B: Austausch „Aufgaben-Dossier“	AM4_Dossier
8. Phase: Zusammenfassung und Abschluss (ca. 10 min)		
Σ 180 min		

Mögliche Zeitstruktur Teil 2: Gleichungen

Zeit	Inhalt / Aktivität	Material / Medien
1 Phase: Einstieg (ca. 24 min)		
2 min	▪ Einstimmung zu Gleichungen	1 Folie
15 min	▪ Wiederholung Teil 1: Variable und Terme mit Aktivität Gallery Walk zu mitgebrachten Hausaufgaben (vgl. Aufgabe von Teil 1)	3 Folien
	▪ Übersicht Algebra und zentrale Schwierigkeiten	2 Folien
7 min	▪ Einstiegsaktivität (Murmelfase): Gleichungen im Unterricht	1 Folie
2. Phase: Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen – Worauf kommt es an? (ca. 45 min)		
10 min	▪ Aktivität 1: Think-Pair-Share: Gleichungen sortieren und klassifizieren	3 Folien +
	▪ Input: Verschiedene Vorstellungen von Gleichheit und Gleichheitszeichen	AM1_Gleichheitszeichen
10 min	▪ Aktivität 2: Werte für Variablen auf unterschiedliche Weisen ermitteln, Input: systematisierende Auswertung	2 Folien
10 min	▪ Handlungsorientierte Modelle (Äquivalenzumformung) mit Murmelfase , Waagemodell und „Streichhölzer“-Aufgabe	5 Folien
10 min	▪ Äquivalenzumformung sprachlich ausdrücken mit Murmelfase , Vergleich Alltags- und Fachsprache	4 Folien
5 min	▪ Zusammenfassung der Verstehenshürden	1 Folie
3. Phase: Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen – Wie diagnostizieren wir? (ca. 45 min)		
20 min	▪ Aktivität 3A: Lernendenlösungen analysieren mit Rückgriff auf Aufgabe aus Teil 1, ggf. Beispiele angeben mit AM2_Fehler	1 Folie + AM2_Fehler
20 min	▪ Input: Typische Schwierigkeiten beim Lösen (linearer) Gleichungen	5 Folien
5 min	▪ Aktivität 3B: Analyse von Lernendenlösungen reflektieren	1 Folie + AM2_Fehler
4. Phase: Gleichungen verstehen, aufstellen und lösen – Wie fördern wir? (ca. 53 min)		
25 min	▪ Zusammenfassender Input: Typische Schwierigkeiten beim Lösen (linearer) Gleichungen, dazu Aktivität 4: Mit typischen Schwierigkeiten umgehen	2 Folien
3 min	▪ Input: Typischen Fehlern <i>vor</i> dem Lösen (linearer) Gleichungen begegnen	1 Folie
10 min	▪ Input: Typischen Fehlern <i>während</i> des Lösens (linearer) Gleichungen begegnen mit Murmelfase zur Förderaufgabe	4 Folien
3 min	▪ Input: Typischen Fehlern <i>nach</i> dem Lösen (linearer) Gleichungen begegnen	1 Folie
12 min	▪ Tipps: inhaltliches Denken fördern	3 Folien
5. Phase: Zusammenfassung und Abschluss (ca. 13 min)		
5 min	▪ Zusammenfassung der Fortbildungsinhalte und Ausblick auf weiteres Material	3 Folien
8 min	▪ Abschlussevaluation	1 Folie
Σ 180 min		
Praxis- erprobung	Praxiserprobung: Erstellen Sie zum beobachteten Fehler beim Gleichungslösen ein bis zwei Aufgaben, die Lernenden dabei helfen, die Ursache des Fehlers zu verstehen und diesen dadurch zukünftig zu vermeiden.	1 Folie
Anschluss- sitzung	Für mögliche Anschlussstunde ist ein Reflexionsauftrag gegeben	1 Folie

Quelle und Nutzungsrechte



Dieses Material wurde für das Deutsche Zentrum für Lehrkräftebildung Mathematik (DZLM) konzipiert und kann, soweit nicht anders gekennzeichnet, unter der **Creative Commons Lizenz BY-SA: Namensnennung – Weitergabe unter gleichen Bedingungen** weiterverwendet werden. Das bedeutet: Alle Folien und Materialien können, soweit nicht anders gekennzeichnet, für Zwecke der Aus- und Fortbildung genutzt und verändert werden, wenn die Quellenhinweise mit DZLM, Projektname, Autorinnen und Autoren aufgeführt bleiben sowie das bearbeitete Material unter der gleichen Lizenz weitergegeben wird (<https://creativecommons.org/licenses/>).

Teile dieses Fortbildungsmaterials wurden ursprünglich entwickelt von Maike Abshagen, Bärbel Barzel und Judith Blomberg im Rahmen der DZLM-Fortbildung „Algebra: Vielfältig. Verstehensorientiert. Nachhaltig.“.

Der hier vorliegende Zuschnitt des Bausteins wurde im Rahmen des Projekts Mathematik aufholen nach Corona erstellt, mit Finanzierung von 14 Bundesländern von Bärbel Barzel, Tobias Domokos, Anika Dreher, Marita Friesen, Lars Holzäpfel, Macarena Larrain und Lukas Weith, unter Vorarbeiten von Maike Abshagen und Judith Blomberg.

Wichtiger Hinweis zur Nutzung der urheberrechtlich geschützten Bilder und Videos:

Bildnachweise und Zitatquellen finden sich auf den jeweiligen Folien bzw. Zusatzmaterialien.

- Mit dem Download der Materialien wird kein Eigentum an den Videos/Fotos erworben, sondern nur die Nutzungsmöglichkeit wie folgt: Die Nutzung ist im Rahmen der Aus- und Fortbildung von Lehrkräften zulässig, die Videos und Fotos sollen nur auf Plattformen mit Registrierung verbreitet werden, nicht frei im Internet wie z. B. öffentlich zugänglichen Videoplattformen wie YouTube. Streaming auf Plattformen mit Registrierungsschranken sind erlaubt.
- Eine andere Nutzung der Videos als in Lehrkräfteaus- und -fortbildung ist nicht erlaubt.

Literatur--bezug

Basisliteratur

- Barzel, B., Glade, M. & Klinger, M. (2021). *Algebra und Funktionen*. Springer Spektrum.
- Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2011). Gleichungen verstehen. *Mathematik Lehren*, 169, 2–7.
- Barzel, B. & Holzäpfel, L. (2017). Strukturen als Basis der Algebra. *Mathematik Lehren*, 202, 2–8.
- Barzel, B. & Hußmann, S. (2008). Schlüssel zu Variable, Term und Formel. In B. Barzel, T. Berlin, D. Bertalan & A. Fischer (Hrsg.), *Entwicklung des algebraischen Denkens. Festschrift zum 60. Geburtstag von Lisa Hefendehl-Hebeker* (S. 6–17). Franzbecker.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2017). *Mathewerkstatt 6*. Cornelsen. Berlin.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Mathewerkstatt 7*. Cornelsen. Berlin.
- Barzel, B., Hußmann, S., Leuders, T. & Prediger, S. (Hrsg.) (2015). *Mathewerkstatt 8*. Cornelsen. Berlin.
- Blomberg, J. & Abshagen, M. (2017): Fit in Algebra? Mach den smart-Test! *Mathe-Welt* (202), Friedrich Verlag.
- Blomberg, J. & Marxer, M. (2017). Wie aus Zahlen Variablen werden. Oder: Verstehen, wie man verallgemeinert. *Mathematik Lehren*, (202), 14–19.
- Blum, W., Drüke-Noe, C., Hartung, R. & Köller, O. (2010). *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen*. Cornelsen.
- Eigel, S. (2011). Nicht nur das Ergebnis prüfen. Aus Fehlern in Gleichungen lernen. *Mathematik lehren*, 169, 46–48.
- Fischer, A., Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2010). Mehr als Umformen: Reichhaltige algebraische Denkhandlungen im Lernprozess sichtbar machen. *Praxis der Mathematik in der Schule*, 52(33), 1–7.
- Leuders, T. (2012). Kompetenzorientierte Aufgaben im Unterricht. In W. Blum (Hrsg.), *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichts Anregungen, Fortbildungsideen* (6., S. 81–95). Cornelsen.
- Malle, G. (1993). *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg.
- Prediger, S. (2009). Inhaltliches Denken vor Kalkül – Ein didaktisches Prinzip zur Vorbeugung und Förderung bei Rechenschwierigkeiten. In A. Fritz & S. Schmidt (Hrsg.), *Fördernder Mathematikunterricht in der Sek. I* (S. 213–234). Beltz.
- Prediger, S., Barzel, B., Leuders, T. & Hußmann, S. (2011). Systematisieren und Sichern. Nachhaltiges Lernen durch aktives Ordnen. *Mathematik lehren*, 164, 2–9.
- Vollrath, H. (1994). *Algebra in der Sekundarstufe*. BI-Wissenschaftsverlag.
- Zwetzschler, L. (2015). *Gleichwertigkeit von Termen: Entwicklung und Beforschung eines diagnosegeleiteten Lehr-Lernarrangements im Mathematikunterricht der 8. Klasse*. Springer.

